آزمون اول

ویژگی‌های اعداد حقیقی

سطح (۱)

۱- کدام‌یک از گزاره‌های زیر در دستگاه اعداد حقیقی، «اصل» به شمار می‌رود؟

۱) برای هر سه عدد حقیقی x، y و z، اگر $x+z=y+z$، آن‌گاه $x=y$.

۲) برای هر سه عدد حقیقی x، y و z داریم $x(y+z)=xy+xz$.

۳) عضو صفر در $\mathbb{R}$ منحصر به فرد است.

۴) عددی حقیقی مانند x موجود است که برای هر عدد حقیقی مانند y، داشته باشیم $x+y=۰$.

۲- گزاره‌ی « $\mathbb{R}$ شامل عددی مانند x است که به ازای هر عدد حقیقی y، داریم $x+y=y$.»، کدام‌یک از اصول دستگاه اعداد حقیقی را بیان می‌کند؟

۱) شرکت‌پذیری　　۲) بسته بودن　　۳) وجود عضو قرینه　　۴) وجود عضو همانی جمع

۳- اگر $y_۱$ و $y_۲$ هر دو قرینه‌ی عدد حقیقی x باشند، آن‌گاه به‌صورت زیر منحصر به فرد بودن قرینه‌ی عدد حقیقی x ثابت شده است:

$$y_۲=y_۲+۰=y_۲+(x+y_۱)=(y_۲+x)+y_۱=۰+y_۱=y_۱$$

در اثبات فوق از اصل وجود عضو قرینه چند بار استفاده شده است؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

۴- اگر $۲x+y-۳$ و $y-x+۴$ به ترتیب عضو همانی عمل‌های جمع و ضرب در مجموعه‌ی اعداد حقیقی باشند، وارون عدد $\frac{y^۲}{x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$　　۲) $\frac{۱}{۲}$　　۳) ۲　　۴) ۳

۵- مجموعه‌ی $A=\{۱+x \mid x\in \mathbb{Q}'\}$، کدام ویژگی را دارد؟ ($\mathbb{Q}'$ مجموعه‌ی اعداد گنگ است.)

۱) نسبت به عمل جمع بسته است.　　۲) نسبت به عمل ضرب بسته است.

۳) هر عضو آن، دارای وارون است.　　۴) دارای عضو همانی ضرب است.

۶- بسط اعشاری کدام‌یک از اعداد زیر، متناوب ساده است؟

۱) $\frac{۷}{۱۵}$　　۲) $\frac{۹}{۱۶}$　　۳) $\frac{۳}{۲۲}$　　۴) $\frac{۶}{۱۴}$

۷- بسط اعشاری ...۰/۱۲۲۲، چه‌قدر از بسط اعشاری ...۰/۱۲۱۲۱۲ بزرگ‌تر است؟

۱) $\frac{۱}{۱۰}$　　۲) $\frac{۱۱}{۱۰۰}$　　۳) $\frac{۱}{۹۰۰}$　　۴) $\frac{۱}{۹۹۰}$

۸- حاصل $\dfrac{۰/۱\overline{۲۷}+۰/۰\overline{۹}}{۰/۱\overline{۲۷}-۰/۰\overline{۹}}$ کدام است؟ (مشابه آزاد ریاضی ۹۰)

۱) ۶/۲　　۲) ۵/۸　　۳) ۶　　۴) ۵/۵

۹- اگر بسط اعشاری $۱/۲\overline{۳}$ با کسر $\frac{۲a-۳}{a+۱۰}$ برابر باشد، عدد طبیعی a کدام است؟

۱) ۱۵　　۲) ۱۸　　۳) ۲۰　　۴) ۲۱

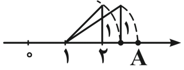
۱۰- کدام عدد زیر گنگ است؟

۱) $\frac{۱}{۲/۳۹}$　　۲) ...۱/۲۵۵۵　　۳) $\frac{۱}{۰/۱۲۱۲۱۲...}$　　۴) ...۲/۰۱۰۰۱۰۰۰۱

۱۱- اگر a و b دو عدد گویا باشند، از تساوی $\frac{a\sqrt{۲}+b}{۱-۳\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$، حاصل ab کدام است؟

۱) -۶　　۲) -۵　　۳) ۵　　۴) ۶

۱۲- در شکل مقابل، نقطه‌ی A متناظر با کدام عدد زیر است؟



۱) $۱+\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$　　۲) $۱+\sqrt{۳}$　　۳) $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$　　۴) $۱+\sqrt{۵}$

سطح (۲)

۱۳- اگر y و $y-۴$ به ترتیب وارون و قرینه‌ی عدد حقیقی x باشند، مقداری از y که از عضو همانی ضرب کوچک‌تر است، کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}-۱$ ۲) $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}-۱$ ۴) $۲-\sqrt{۳}$

۱۴- اگر اعداد حقیقی y و $\frac{۲}{y}+۱$ هر دو وارون عدد حقیقی $\sqrt{x}$ باشند، xy کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۵- اگر r یک عدد صحیح ثابت و $۰ \le r < ۶$ و $A=\{۶k+r \mid k\in\mathbb{Z}\}$ باشد، به ازای کدام مقدار r، مجموعه‌ی A نسبت به عمل ضرب بسته نیست؟

۱) $r=۱$ ۲) $r=۴$ ۳) $r=۳$ ۴) $r=۲$

۱۶- کسر متعارفی مساوی بسط اعشاری $۱/۳\overline{۶}$ به صورت $\frac{p}{q}$ است که اعداد طبیعی p و q نسبت به هم اول‌اند. مجموع ارقام عدد p و ارقام عدد q کدام است؟ (مشابه سراسری ریاضی ۷۶)

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) ۹

۱۷- اگر $\frac{b}{۱۱}=۰/\overline{ab}$، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۱۸- اگر $\frac{۴}{۱۵}=۰/a\overline{b}$ باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۹- اگر بسط اعشاری $۰/\overline{۲۷}$ و عدد گویای $\frac{x+۲}{۱+۴x}$، هر دو قرینه‌ی عدد y باشند، $x+۵۵y$ کدام است؟

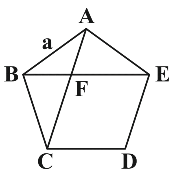
۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۷

۲۰- اگر کسر $\frac{۵}{۷}$ را به‌صورت بسط اعشاری نمایش دهیم، رقم هزار و یکم پس از اعشار در این بسط کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۸ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۱- اگر α گویا و β گنگ باشد، کدام عدد زیر الزاماً گنگ است؟

۱) $\alpha\beta$ ۲) α^{β} ۳) $\beta^{۲}+۲\beta$ ۴) $\alpha^{۲}\beta+\beta$



۲۲- در پنج‌ضلعی منتظم مقابل، قطرهای AD و EB هم‌دیگر را در نقطه‌ی F قطع کرده‌اند. اگر طول ضلع این پنج ضلعی منتظم عدد گویای a باشد، آن‌گاه چه تعداد از کسرهای $\frac{EF}{FB}$، $\frac{EB}{AB}$ و $\frac{EF}{AB}$ گنگ می‌باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

سطح (۳)

۲۳- کدام گزاره درست است؟

۱) عضو همانی ضرب در $\mathbb{R}$، منحصر به فرد است.
۲) عضو وارون در $\mathbb{R}$ منحصر به فرد است.
۳) وارونِ وارون هر عدد برابر خود آن عدد است.
۴) هر سه گزاره صحیح است.

۲۴- مجموعه‌ی $A=\left\{\sqrt{۲}x+۱ \mid x\in\mathbb{Q}-\{۰\}\right\}$، کدام خاصیت را دارد؟

۱) نسبت به عمل جمع بسته است.
۲) نسبت به عمل ضرب بسته است.
۳) دارای عضو همانی ضرب است.
۴) هر عضو آن، وارون دارد.

۲۵- مجموعه‌ی متناهی و ناتهی A، نسبت به اعمال ضرب و تقسیم بسته است. چه تعداد از گزاره‌های زیر در مورد مجموعه‌ی A الزاماً درست است؟

الف) قرینه‌ی هر عضو A در این مجموعه وجود دارد.
ب) وارون هر عضو A در این مجموعه وجود دارد.
ج) A دارای عضو همانی ضرب است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲۶- به ازای چند مقدار طبیعی n، بسط اعشاریِ کسر متعارفی کم‌تر از واحد $\frac{n(n+1)}{n^2+7}$، متناوب ساده است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۲۷- به ازای چند مقدار طبیعی n، بسط اعشاری کسر کوچک‌تر از واحد $\frac{2n}{45}$، متناوب مرکب است؟

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

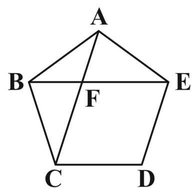
۲۸- اگر عدد $\frac{a\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+b}$ و بسط اعشاری $0/\overline{c}$، هر دو وارون عدد ۳ باشند، حاصل $b-ac$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۹- کسر گویا و مثبت $\frac{a\sqrt{2}+1}{3\sqrt{2}+a-2}$ برابر کدام عدد زیر است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) ۳

۳۰- اگر در شکل مقابل، طول ضلع پنج‌ضلعی منتظم عددی گنگ باشد، آن‌گاه طول کدام‌یک از پاره‌خط‌های زیر همواره عددی گنگ است؟



۱) AF ۲) FC

۳) AC ۴) نمی‌توان اظهارنظر قطعی کرد.

آزمون اول

ویژگی‌های اعداد حقیقی

سطح (۱)

۱- (۲)

نکته (۱): اصل، گزاره‌ای است که بدون اثبات، درستی آن را می‌پذیریم.

نکته (۲): مجموعه‌ی اعداد حقیقی به انضمام هر یک از اعمال جمع $(+)$ یا ضرب $(\times)$ که در اصل‌های زیر صدق کند را دستگاه اعداد حقیقی می‌گوییم:

۱) بسته بودن: یعنی برای هر دو عدد حقیقی x و y داشته باشیم $x+y\in\mathbb{R}$ (برای جمع) و $xy\in\mathbb{R}$ (برای ضرب).

۲) جابه‌جایی: یعنی برای هر دو عدد حقیقی x و y داشته باشیم $x+y=y+x$ (برای جمع) و $xy=yx$ (برای ضرب).

۳) شرکت‌پذیری: یعنی برای هر سه عدد حقیقی x، y و z داشته باشیم $x+(y+z)=(x+y)+z$ (برای جمع) و $x(yz)=(xy)z$ (برای ضرب).

۴) وجود عضو همانی: در $\mathbb{R}$ عضوی به نام صفر (با نمادِ ۰) موجود است که برای هر $x\in\mathbb{R}$ ، $x+0=x$.

هم‌چنین در $\mathbb{R}$ عضوی به نام یک (با نمادِ ۱) موجود است که برای هر $x\in\mathbb{R}$ ، $x\times 1=x$.

۵) وجود عضو قرینه و وارون: برای هر $x\in\mathbb{R}$، عضوی مانند $y\in\mathbb{R}$ موجود است که $x+y=0$. عضو y را قرینه‌ی x می‌گوییم و آن را با $(-x)$ نمایش می‌دهیم.

هم‌چنین برای هر $x\in\mathbb{R}-\{0\}$، عضوی مانند $y\in\mathbb{R}$ موجود است که $xy=1$. عضو y را وارون x می‌گوییم و آن را با نماد x^{-1} نمایش می‌دهیم.

نکته (۳): اصول دیگری نیز در $\mathbb{R}$ وجود دارد که از مهم‌ترین آن‌ها اصل توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع می‌باشد که به صورت زیر بیان می‌شود:

برای هر سه عدد حقیقی x، y و z داریم: $x(y+z)=xy+xz$

از بین گزاره‌های داده شده، فقط گزاره‌ی داده شده در گزینه‌ی (۲) همان اصل توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع است. لذا پاسخ تست نیز همین گزینه است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه‌ی (۱): این گزاره همان قانون حذف در جمع اعداد حقیقی است که به کمک اصول ذکر شده قابل اثبات است.

گزینه‌ی (۳): منحصر به فرد بودن عضو همانی جمع یعنی صفر، خود اصل نیست، بلکه به کمک دو اصل «جابه‌جایی» و «وجود عضو همانی جمع» قابل اثبات است.

گزینه‌ی (۴): این گزاره نه تنها اصل نیست، بلکه کلاً گزاره‌ی نادرستی است. زیرا هیچ عددی مثل x موجود نیست که حاصل جمع آن با هر عدد حقیقی دیگری مثل y، برابر صفر شود.

۲- (۴) اصل وجود عضو همانی جمع بیان می‌کند که در $\mathbb{R}$ عددی به نام صفر (با نمادِ ۰) موجود است که برای هر عدد حقیقی y، داریم $y+0=y$. بنابراین در گزاره‌ی داده شده، x همان عدد صفر است و این گزاره اصل وجود عضو همانی جمع را مطرح می‌کند.

۳- (۳) اثبات داده شده را مجدداً نوشته و در هر مرحله، اصلی که استفاده می‌شود را کنار آن می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_2+0 && \text{(وجود عضو همانی جمع)}\\ &= y_2+(x+y_1) && \text{(وجود عضو قرینه)}\\ &= (y_2+x)+y_1 && \text{(شرکت‌پذیری)}\\ &= 0+y_1 && \text{(وجود عضو قرینه)}\\ &= y_1 && \text{(جابه‌جایی و وجود عضو همانی جمع)} \end{aligned}$$

بنابراین از اصل وجود عضو قرینه، دو بار در این اثبات استفاده شده است.

۴- (۳)

نکته (۱): عدد صفر را عضو همانی عمل جمع و عدد یک را عضو همانی عمل ضرب در مجموعه‌ی اعداد حقیقی می‌گوییم.

نکته (۲): وارون عدد غیرصفر x، برابر $\frac{1}{x}$ است و با نماد x^{-1} نمایش داده می‌شود.

بنابر فرض می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 2x+y-3=0 \\ y-x+4=1 \end{cases} \Rightarrow x=2 \,,\, y=-1$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{x}=\frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{y^2}{x}\right)^{-1}=2$$

۵- (۳)

نکته (۱): مجموعه‌ی اعداد گنگ (اصم) نسبت به هیچ‌یک از چهار عمل اصلی بسته نیست.

نکته (۲): مجموع یا تفاضل یک عدد گویا و یک عدد گنگ، همواره عددی گنگ است.

نکته (۳): از بین اعداد حقیقی، فقط عدد صفر وارون ندارد.

مجموعه‌ی A متشکل از اعضایی به شکل مجموع یک عدد گنگ با عدد گویای ۱ است و لذا تمامی اعضای آن گنگ هستند.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه‌ی (۱): فرض کنیم $a=1+x$ و $b=1+x'$ دو عضو دلخواه در A باشند. پس $x'\in\mathbb{Q}'$ و x. لذا داریم:

$a+b=(1+x)+(1+x')=2+x+x'$

از آن‌جا که مجموعه‌ی $\mathbb{Q}'$ نسبت به جمع بسته نیست، لذا ممکن است $a+b$ گویا باشد و در نتیجه $a+b\notin A$. به عنوان مثال $a=1+\sqrt{2}$ و $b=1-\sqrt{2}$ دو عضو از مجموعه‌ی A هستند اما $a+b=2\notin A$. پس مجموعه‌ی A نسبت به جمع بسته نیست و در نتیجه این گزینه نادرست است.

گزینه‌ی (۲): اگر قرار دهیم $a=1+\sqrt{2}$ و $b=1-\sqrt{2}-1$، آن‌گاه $a,b\in A$، اما $ab=-1\notin A$. پس این گزینه نادرست است.

گزینه‌ی (۳): چون $x\in\mathbb{Q}'$، لذا عضو $1+x$ هرگز برابر صفر نمی‌شود. یعنی هیچ یک از اعضای A صفر نیست و در نتیجه هر عضو آن وارون دارد. لذا این گزینه درست است.

گزینه‌ی (۴): عضو همانی ضرب، همان عدد ۱ است. باید ببینیم آیا عضوی از اعضای مجموعه‌ی A می‌تواند برابر ۱ باشد یا خیر. چون اعضای A به شکل $1+x$ هستند که در آن x گنگ است، اگر یکی از این اعضا بخواهد برابر ۱ باشد، لازم است x برابر صفر باشد و این غیرممکن است، زیرا x عددی گنگ است. پس این گزینه نیز نادرست است.

۶- (۴)

نکته (۱): در کسر گویای متعارفی $\frac{p}{q}$، اگر صورت و مخرج نسبت به هم اول باشند، یعنی $(p,q)=۱$، آن‌گاه $\frac{p}{q}$ را کسری تحویل‌ناپذیر می‌گوییم.

نکته (۲): اعداد گویا سه دسته‌اند:

دسته‌ی اول: اعداد گویایی که بسط اعشاری آن‌ها پایان‌پذیر (مختوم) است. در مخرج کسر متعارفی تحویل‌ناپذیر این اعداد، فقط عامل‌های اول ۲ یا ۵ و یا هر دو وجود دارد. اگر صورت این کسرها را بر مخرج آن‌ها تقسیم کنیم، باقی‌مانده به صفر می‌رسد.

مانند: $\frac{۳}{۲۰}=۰/۱۵ \ ,\ \frac{۲}{۵}=۰/۴ \ ,\ \frac{۱}{۲}=۰/۵$

تذکر: اعداد صحیح جزء دسته‌ی فوق به‌شمار می‌آیند.

دسته‌ی دوم: اعداد گویایی که بسط اعشاری آن‌ها متناوب ساده است. در مخرج کسر متعارفی تحویل‌ناپذیر این اعداد، عامل‌های اول به جز ۲ و ۵ وجود دارد. اگر صورت این کسرها را بر مخرج آن‌ها تقسیم کنیم، باقی‌مانده هرگز به صفر نمی‌رسد و رقم یا ارقامی در خارج قسمت به‌طور تناوبی تکرار می‌شوند که به آن‌ها ارقام گردشی می‌گوییم.

مانند: $\frac{۱}{۳}=۰/\overline{۳}$

دسته‌ی سوم: اعداد گویایی که بسط اعشاری آن‌ها متناوب مرکب است. در مخرج کسر متعارفی تحویل‌ناپذیر این اعداد، عامل‌های اول ۲ یا ۵ یا هر دو و در عین حال حداقل یک عامل اول به جزء ۲ و ۵ وجود دارد. اگر صورت این کسرها را بر مخرج آن‌ها تقسیم کنیم، باقی‌مانده به صفر نمی‌رسد و در خارج قسمت، رقم یا ارقامی بدون تکرار بلافاصله بعد از ممیز ظاهر شده و پس از این ارقام، رقم یا ارقامی به طور تناوبی تکرار می‌شوند.

مانند: $\frac{۴}{۱۵}=۰/۲\overline{۶}$

نکته (۳): در مورد بسط‌های اعشاری متناوبی که رقم گردشی آن‌ها ۹ است باید دقت کرد: $۰/۱۲\overline{۹}=۰/۱۳ \ ,\ ۷/۴\overline{۹}=۷/۵ \ ,\ ۲/\overline{۹}=۳$

بررسی گزینه‌ها:

گزینه‌ی (۱): کسر $\frac{۷}{۱۵}$، تحویل‌ناپذیر بوده و مخرج کسر از عامل‌های اول ۳ و ۵ تشکیل شده است. پس بسط اعشاری این کسر، متناوب مرکب است.

گزینه‌ی (۲): کسر $\frac{۹}{۱۶}$، تحویل‌ناپذیر بوده و مخرج کسر تنها از عامل اول ۲ تشکیل شده است. لذا بسط اعشاری آن، پایان‌پذیر (مختوم) است.

گزینه‌ی (۳): کسر $\frac{۳}{۲۲}$، تحویل‌ناپذیر بوده و مخرج کسر از عامل‌های اول ۲ و ۱۱ تشکیل شده است. لذا بسط اعشاری آن، متناوب مرکب است.

گزینه‌ی (۴): اگر کسر $\frac{۶}{۱۴}$ را به‌صورت $\frac{۳}{۷}$ بنویسیم به کسر تحویل‌ناپذیر تبدیل می‌شود. چون مخرج کسر اخیر فقط از عامل اول ۷ تشکیل شده است، لذا بسط اعشاری آن، متناوب ساده است.

۷- (۴)

نکته (۱): اگر A یک عدد طبیعی n رقمی باشد، آن‌گاه بسط اعشاری متناوب ساده‌ی $۰/\overline{A}$ و کسر متعارفی $\frac{A}{\underbrace{۹۹...۹}_{n\ \text{بار}}}$ برابرند. مثلاً $۰/\overline{۳۷}=\frac{۳۷}{۹۹}$ و $\frac{۳۴}{۳۷}=\frac{۹۱۸}{۹۹۹}=۰/\overline{۹۱۸}$.

نکته (۲): اگر A و B اعداد حسابیِ به‌ترتیب n و m رقمی باشند، آن‌گاه بسط اعشاری متناوب مرکب $۰/B\overline{A}$ و کسر متعارفی $\frac{\overline{BA}-B}{\underbrace{۹۹...۹}_{n\ \text{بار}}\underbrace{۰۰...۰}_{m\ \text{بار}}}$ برابرند. مثلاً $۰/۱\overline{۳۷}=\frac{۱۳۷-۱}{۹۹۰}=\frac{۶۸}{۴۹۵}$ و $۰/۳۲\overline{۵}=\frac{۳۲۵-۳۲}{۹۰۰}=\frac{۲۹۳}{۹۰۰}$.

تذکر (۱): در نکات فوق اگر در سمت چپ هریک از اعدادِ A و B، رقم صفر (به هر تعداد) وجود داشته باشد، باید در شمارش تعداد ارقام A و B محسوب شوند. مثلاً $\frac{۰۷}{۹۹}=۰/\overline{۰۷}$ و $\frac{۵۰۳}{۹۹۰۰۰}=\frac{۰۰۵۰۸-۰۰۵}{۹۹۰۰۰}=۰/۰۰۵\overline{۰۸}$

تذکر (۲): در بسط‌های اعشاری متناوب اگر رقم سمت چپ ممیز به جای صفر، عددی طبیعی باشد، برای به‌دست آوردن کسر متعارفی به همان روش قبل عمل می‌کنیم و کسر حاصله را با عدد طبیعی مذکور جمع می‌کنیم. مانند:

$$۲/\overline{۰۷}=۲+\frac{۰۷}{۹۹}=\frac{۱۹۸+۷}{۹۹}=\frac{۲۰۵}{۹۹}$$

$$۰/۱۲۲۲...-۰/۱۲۱۲۱۲...=۰/۱\overline{۲}-۰/\overline{۱۲}=\frac{۱۲-۱}{۹۰}-\frac{۱۲}{۹۹}$$
$$=\frac{۱۱}{۹۰}-\frac{۱۲}{۹۹}=\frac{۱۲۱-۱۲۰}{۹۹۰}=\frac{۱}{۹۹۰}$$

۸- (۳)

$$\begin{cases} ۰/۱\overline{۲۷}=\frac{۱۲۷-۱}{۹۹۰}=\frac{۱۴}{۱۱۰}=\frac{۷}{۵۵} \\ ۰/\overline{۰۹}=\frac{۰۹}{۹۹}=\frac{۱}{۱۱}=\frac{۵}{۵۵} \end{cases} \Rightarrow \frac{۰/۱\overline{۲۷}+۰/\overline{۰۹}}{۰/۱\overline{۲۷}-۰/\overline{۰۹}}=\frac{\frac{۱۲}{۵۵}}{\frac{۲}{۵۵}}=۶$$

۹- (۳) ابتدا بسط اعشاری $۱/۲\overline{۳}$ را به‌صورت یک کسر متعارفی می‌نویسیم:

$$۱/۲\overline{۳}=۱+۰/۲\overline{۳}=۱+\frac{۲۳-۲}{۹۰}=۱+\frac{۲۱}{۹۰}=۱+\frac{۷}{۳۰}=\frac{۳۷}{۳۰}$$

بنابر فرض داریم:

$$\frac{۲a-۳}{a+۱۰}=\frac{۳۷}{۳۰}\Rightarrow ۶۰a-۹۰=۳۷a+۳۷۰\Rightarrow ۲۳a=۴۶۰\Rightarrow a=۲۰$$

۱۰- (۴)

نکته (۱): هر عدد که بسط اعشاری آن مختوم یا متناوب ساده و یا متناوب مرکب باشد، گویا است.

نکته (۲): هر عددی گویا نباشد، گنگ است.

نتیجه: هر عدد که بسط اعشاری آن پایان‌ناپذیر غیرمتناوب باشد، گنگ (اصم) است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه‌ی (۱): مخرج کسر یک عدد اعشاری مختوم است، لذا این عدد، گویا و غیر صفر بوده و در نتیجه عکس آن نیز گویا است.

گزینه‌ی (۲): داریم $۱/۲\overline{۵}=۱/۲۵۵۵...$، لذا این عدد دارای بسط اعشاری متناوب مرکب بوده و لذا گویا است.

گزینه‌ی (۳): داریم $۰/\overline{۱۲}=۰/۱۲۱۲...$، لذا مخرج کسر عددی غیر صفر با بسط اعشاری متناوب ساده است و در نتیجه گویا است. بنابراین عکس آن نیز گویا است.

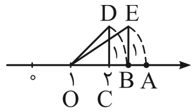
گزینه‌ی (۴): عدد $۲/۰۱۰۰۱۰۰۰۱...$ دارای بسط اعشاری بی‌پایان و غیرمتناوب است. (اگرچه ارقام بعد از ممیز به صورت موزون ادامه دارد.) بنابراین این عدد گویا نیست و لذا گنگ (اصم) می‌باشد.

۱۱- (۱)

$$\frac{a\sqrt{۲}+b}{۱-۳\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}\Rightarrow a\sqrt{۲}+b=\sqrt{۲}-۶$$

تساوی فوق زمانی برقرار است که $a=۱$ و $b=-۶$ باشد، لذا $ab=-۶$.

۱۲- (۲) با توجه به شکل مقابل، معلوم می‌شود که $x_A=۱+OA$. لذا کافی است OA را به‌دست آوریم و حاصل آن را با ۱ جمع کنیم.



$\overset{\Delta}{OCD}: OD^۲=OC^۲+DC^۲=۱+۱\Rightarrow OD=\sqrt{۲}$

$\xrightarrow{OD=OB} OB=\sqrt{۲}$

$\overset{\Delta}{OBE}: OE^۲=OB^۲+BE^۲=(\sqrt{۲})^۲+۱^۲=۳\Rightarrow OE=\sqrt{۳}$

$\xrightarrow{OE=OA} OA=\sqrt{۳}$

بنابراین $x_A=۱+\sqrt{۳}$.

سطح (۲)

۱۳- (۴) چون y وارون عدد حقیقی x است، پس $x=\frac{۱}{y}$. از طرفی چون $y-۴$ قرینه‌ی عدد حقیقی x است، پس $x=-(y-۴)$. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases}x=\frac{۱}{y}\\ x=۴-y\end{cases}\Rightarrow ۴-y=\frac{۱}{y}\Rightarrow ۴y-y^۲=۱\Rightarrow y^۲-۴y+۱=۰$$

با حل معادله‌ی درجه دوم اخیر، مقدار y را می‌یابیم:

$$\Delta=۱۶-۴=۱۲\Rightarrow y=\frac{۴\pm\sqrt{۱۲}}{۲}=\frac{۴\pm ۲\sqrt{۳}}{۲}=۲\pm\sqrt{۳}$$

طبق فرض، مقداری از y که از عضو همانی ضرب یعنی عدد ۱، کوچکتر است، خواسته شده است، پس $y=۲-\sqrt{۳}$ قابل قبول است.

۱۴- (۲)

نکته: وارون هر عدد حقیقی غیرصفر، منحصر به فرد است.

چون اعداد y و $\frac{۲}{y}+۱$ هر دو وارون عدد حقیقی $\sqrt{x}$ هستند، لذا با توجه به نکته‌ی فوق باید با هم برابر باشند.

$$y=\frac{۲}{y}+۱\Rightarrow y^۲=۲+y\Rightarrow y^۲-y-۲=۰\Rightarrow (y+۱)(y-۲)=۰$$

$\Rightarrow y=۲$ یا $y=-۱$

چون y وارون عدد حقیقی $\sqrt{x}$ است، پس داریم $\sqrt{x}.y=۱$. در نتیجه $y=-۱$ در این رابطه صدق نمی‌کند. (چرا؟) لذا فقط $y=۲$ قابل قبول است. با قرار دادن $y=۲$ در رابطه‌ی $\sqrt{x}.y=۱$، به‌دست می‌آید $x=\frac{۱}{۴}$. در نتیجه $xy=\frac{۱}{۲}$.

۱۵- (۴)

نکته: مجموعه‌ی A را نسبت به عمل دلخواه * بسته می‌گوییم، هرگاه به ازای هر دو عضو دلخواه از A مانند a و b داشته باشیم $a*b\in A$.

تذکر: در تعریف فوق چون a و b دلخواه هستند، لذا می‌توان آن‌ها را مساوی هم در نظر گرفت.

مجموعه‌ی A متشکل از اعداد صحیحی است که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر عدد ۶ برابر r است. برای آن‌که مجموعه‌ی A نسبت به عمل ضرب بسته باشد، باید حاصل‌ضرب هر دو عضو دلخواه A، عضوی از A باشد.

به عبارت دیگر اگر $a=۶k_۱+r$ و $b=۶k_۲+r$ $(k_۱,k_۲\in\mathbb{Z})$ دو عضو دلخواه در A باشند، آن‌گاه در صورتی مجموعه‌ی A نسبت به عمل ضرب بسته است که باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد ab نیز بر ۶ برابر r باشد. داریم:

$$ab=(۶k_۱+r)(۶k_۲+r)=۳۶k_۱k_۲+۶rk_۱+۶rk_۲+r^۲$$
$$=۶(۶k_۱k_۲+rk_۱+rk_۲)+r^۲$$

با فرض $۶k_۱k_۲+rk_۱+rk_۲=k'$ داریم $ab=۶k'+r^۲$. بنابراین ab وقتی به مجموعه‌ی A تعلق دارد که باقی‌مانده‌ی تقسیم $r^۲$ بر ۶ برابر r باشد. با بررسی گزینه‌ها معلوم می‌شود که باقی‌مانده‌ی تقسیم $۲^۲$ بر ۶ برابر ۴ است، لذا به ازای $r=۲$، مجموعه‌ی A نسبت به عمل ضرب بسته نیست.

۱۶- (۱)

نکته (۱): اگر A یک عدد طبیعی n رقمی باشد، آن‌گاه بسط اعشاری متناوب ساده‌ی $۰/\overline{A}$ و کسر متعارفی $\frac{A}{\underbrace{۹۹...۹}_{n\text{ بار}}}$ برابرند. مثلاً $۰/\overline{۳۷}=\frac{۳۷}{۹۹}$ و $\frac{۳۴}{۳۷}=\frac{۹۱۸}{۹۹۹}=۰/\overline{۹۱۸}$.

نکته (۲): اگر A و B اعداد حسابیِ به‌ترتیب n و m رقمی باشند، آن‌گاه بسط اعشاری متناوب مرکب $۰/B\overline{A}$ و کسر متعارفی $\frac{\overline{BA}-B}{\underbrace{۹۹...۹}_{n\text{ بار}}\underbrace{۰۰...۰}_{m\text{ بار}}}$ برابرند. مثلاً $۰/۱\overline{۳۷}=\frac{۱۳۷-۱}{۹۹۰}=\frac{۶۸}{۴۹۵}$ و $۰/۳۲\overline{۵}=\frac{۳۲۵-۳۲}{۹۰۰}=\frac{۲۹۳}{۹۰۰}$.

$$۱/۳\overline{۶}=۱+۰/۳\overline{۶}=۱+\frac{۳۶-۳}{۹۰}=۱+\frac{۱۱}{۳۰}=\frac{۴۱}{۳۰}$$

اعداد ۴۱ و ۳۰ مقسوم علیه طبیعی مشترکی به جز ۱ ندارند و لذا نسبت به هم اول‌اند. بنابراین:

$$\begin{cases}p=۴۱\Rightarrow \text{مجموع ارقام } p=۵\\ q=۳۰\Rightarrow \text{مجموع ارقام } q=۳\end{cases}\Rightarrow ۵+۳=۸$$

۱۷- (۳)

$$۰/\overline{ab}=\frac{b}{۱۱}\Rightarrow\frac{\overline{ab}}{۹۹}=\frac{b}{۱۱}$$

چون $\overline{ab}$ یک عدد دو رقمی است، پس $\overline{ab}=۱۰a+b$. لذا خواهیم داشت:

$$\frac{۱۰a+b}{۹۹}=\frac{b}{۱۱}\Rightarrow ۱۰a+b=۹b\Rightarrow ۱۰a=۸b\Rightarrow ۵a=۴b$$

چون a و b هر دو عدد حسابی و یک رقمی‌اند و با توجه به رابطه‌ی $۵a=۴b$، باید a مضرب ۴ و b مضرب ۵ باشد، پس باید داشته باشیم $a=۴$ و $b=۵$ و در نتیجه $a+b=۹$.

۱۸- (۳)

$$۰/a\overline{b}=\frac{۴}{۱۵}\Rightarrow\frac{\overline{ab}-a}{۹۰}=\frac{۴}{۱۵}$$

چون $\overline{ab}$ یک عدد دو رقمی است، لذا می‌توان نوشت $\overline{ab}=۱۰a+b$. پس داریم:

$$\frac{۱۰a+b-a}{۹۰}=\frac{۴}{۱۵}\Rightarrow\frac{۹a+b}{۹۰}=\frac{۴}{۱۵}\Rightarrow ۹a+b=۲۴$$

a و b دو عدد حسابی و یک رقمی‌اند و نه برابر یکی به‌علاوه‌ی دیگری برابر ۲۴ شده است. بنابراین باید $a=۲$ و $b=۶$. در نتیجه $a+b=۸$.

۱۹- (۲) ابتدا بسط اعشاری $۰/\overline{۲۷}$ را به کسر متعارفی تبدیل می‌کنیم.

$$۰/\overline{۲۷}=\frac{۲۷}{۹۹}=\frac{۳}{۱۱}$$

بنابر فرض اعداد گویای $\frac{۳}{۱۱}$ و $\frac{x+۲}{۱+۴x}$ هر دو قرینه‌ی عدد y هستند و چون قرینه‌ی هر عدد حقیقی منحصر به فرد است، لذا این دو عدد برابرند:

$$\frac{x+2}{1+4x}=\frac{3}{11}\Rightarrow 11x+22=3+12x\Rightarrow x=19$$

از طرفی $\frac{3}{11}=0/\overline{27}$ قرینه‌ی عدد y است، پس $y=\frac{-3}{11}$. در نتیجه داریم:

$$x+55y=19+55\left(\frac{-3}{11}\right)=19-15=4$$

۲۰- (۲) با تقسیم صورت کسر بر مخرج آن، بسط اعشاریِ کسر $\frac{5}{7}$ به صورت $0/\overline{714285}$ در می‌آید.

چون تعداد ارقام گردشی بعد از ممیز در این بسط ۶ تا است، لذا کافی است باقی‌مانده‌ی ۱۰۰۱ را بر ۶ به‌دست آوریم. چون $1001=6\times166+5$، پس باقی‌مانده‌ی ۱۰۰۱ بر ۶ برابر ۵ است. لذا رقم هزار و یکم پس از اعشار در بسط اعشاری $0/\overline{714285}$ با رقم پنجم پس از اعشار یعنی ۸ برابر است.

۲۱- (۴)

نکته: حاصل‌ضرب هر عدد گویای غیر صفر در یک عدد گنگ، همواره گنگ است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه‌ی (۱): اگر عدد گویای α برای صفر باشد، آن‌گاه به ازای هر عدد گنگ β، حاصل $\alpha\beta$ برابر عدد گویای صفر خواهد بود و لذا این گزینه نادرست است.

گزینه‌ی (۲): قرار می‌دهیم $\alpha=10$ و $\beta=\log_{10}^{3}$. بنابر یکی از تمرین‌های کتاب درسی β گنگ است. با استفاده از رابطه‌ی $a^{\log_a^A}=A$، داریم:

$$\alpha^{\beta}=10^{\log_{10}^{3}}=3\in\mathbb{Q}$$

بنابراین α^{β} الزاماً گنگ نیست. پس این گزینه نیز نادرست است.

گزینه‌ی (۳): با فرض گنگ بودن β، نشان می‌دهیم حاصل $\beta^2+2\beta$ می‌تواند عدد گویایی مثلاً برابر ۱ باشد:

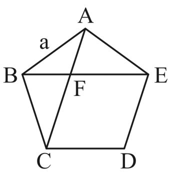
$$\beta^2+2\beta=1\Rightarrow\beta^2+2\beta-1=0\xrightarrow{\Delta=8}\beta=\frac{-2\pm\sqrt{8}}{2}\Rightarrow\beta=-1\pm\sqrt{2}$$

بنابراین این گزینه نادرست است.

گزینه‌ی (۴): داریم $\alpha^2\beta+\beta=(\alpha^2+1)\beta$. چون α^2+1 همواره عدد گویای غیرصفر و β یک عدد گنگ است، لذا با توجه به نکته‌ی بیان‌شده حاصل‌ضرب آن‌ها الزاماً گنگ است. پس این گزینه درست بوده و پاسخ تست هم همین گزینه است.

۲۲- (۴)

نکته: طبق قضیه‌ی هیپاسوس، در هر ۵ ضلعی منتظم به ضلع a نسبت طول قطر به طول ضلع، عددی گنگ است. بنابراین با توجه به شکل اگر دو قطر AC و BE هم‌دیگر را در نقطه‌ی F قطع کنند، داریم:



۱) $AF=BF=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$

۲) $FC=FE=a$

۳) $AC=BE=\frac{\sqrt{5}+1}{2}a$

با توجه به نکته‌ی فوق کسر $\frac{EB}{AB}$ گنگ می‌باشد. از طرفی:

$$L=\frac{EB}{AB}\xrightarrow[FB=AB]{EB=EF+FB}L=\frac{EF+FB}{FB}=\frac{EF}{FB}+1\Rightarrow\frac{EF}{FB}=L-1$$

چون L عددی گنگ است، لذا $L-1$ نیز گنگ بوده و در نتیجه کسر $\frac{EF}{FB}$ گنگ خواهد بود. هم‌چنین با توجه به آن‌که $FB=AB$ می‌باشد، پس $\frac{EF}{AB}$ نیز گنگ می‌باشد، لذا هر سه کسر داده شده کسرهایی گنگ هستند.

سطح (۳)

۲۳- (۱) **بررسی گزینه‌ها:**

گزینه‌ی (۱): بنابر اصل وجود عضو همانی ضرب، عددی به نام یک (با نمادِ ۱) در $\mathbb{R}$ موجود است که به ازای هر $x\in\mathbb{R}$، $x\times1=x$. به آسانی می‌توان نشان داد که عدد ۱ منحصر به فرد است. پس این گزینه درست است.

گزینه‌ی (۲): توجه کنید که وارون هر عدد حقیقی غیر صفر منحصر به فرد است، ولی عضو وارون در $\mathbb{R}$ منحصر به فرد نیست. زیرا یک عدد منحصر به فرد در $\mathbb{R}$ وجود ندارد که وارون تمام اعداد حقیقی باشد. پس این گزینه نادرست است.

گزینه‌ی (۳): می‌دانیم وارونِ وارون هر عدد غیر صفر برابر خود آن عدد است. اما از آن‌جا که عدد صفر وارون ندارد، لذا این حکم در مورد عدد صفر برقرار نیست. چون در این گزینه به غیر صفر بودن عدد اشاره نشده است، پس در حالت کلی این حکم درست نیست.

گزینه‌ی (۴): با نادرست بودن گزینه‌های (۲) و (۳)، این گزینه نیز رد می‌شود.

۲۴- (۴) **بررسی گزینه‌ها:**

گزینه‌ی (۱): با فرض $x=1$ و $x=-1$، $a=\sqrt{2}+1$ و $b=-\sqrt{2}+1$ دو عضو از مجموعه‌ی A خواهند بود و داریم: $a+b=2\notin A$

توجه کنید که چون $x\in\mathbb{Q}-\{0\}$، لذا $\sqrt{2}x$ همواره عدد گنگ بوده و لذا $\sqrt{2}x+1$ نیز همواره گنگ است. بنابراین همه‌ی اعضای A، اعدادی گنگ هستند پس $a+b=2$ نمی‌تواند عضو A باشد. پس این گزینه نادرست است.

گزینه‌ی (۲): با در نظر گرفتن دو عضو A به‌صورت $a=\sqrt{2}+1$ و $b=-\sqrt{2}+1$، داریم:

$$ab=(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-1\notin A$$

پس این گزینه نیز نادرست است.

گزینه‌ی (۳): هر عضو A به شکل $\sqrt{2}x+1$ است که در آن x عدد گویای غیر صفر است. بدیهی است که برای آن‌که یکی از اعضای A بخواهد برابر عضو همانی ضرب یعنی ۱ باشد، لازم است x برابر صفر باشد که این امکان پذیر نیست. زیرا $x\in\mathbb{Q}-\{0\}$. پس این گزینه نیز نادرست است.

گزینه‌ی (۴): برای آن‌که هر عضو A بخواهد وارون داشته باشد باید اعضای آن غیرصفر باشند، زیرا فقط عدد صفر وارون ندارد. از آن‌جا که هیچ یک از اعضای A گویا نیست، لذا تمام اعضای A غیر صفر هستند. پس هر عضو آن وارون دارد. لذا این گزینه درست است.

۲۵- (۲)

نکته (۱): مجموعه‌ی A را نسبت به عمل دلخواه $*$ بسته می‌گوییم، هرگاه به ازای هر دو عضو دلخواه a و b از A، داشته باشیم $a*b\in A$.

تذکر: چون a و b اعضای دلخواهی از A هستند، می‌توان a و b را مساوی یکدیگر انتخاب کرد.

نکته (۲): هر عدد حقیقی غیرصفر، وارون دارد. (فقط عدد ۰ وارون ندارد.)

از بین مجموعه‌های متناهی و ناتهی، تنها مجموعه‌هایی که نسبت به اعمال ضرب و تقسیم بسته‌اند، عبارت‌اند از $\{۱\}$ یا $\{۱,-۱\}$.
بنابراین مجموعه‌ی A با یکی از مجموعه‌های فوق برابر است. حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم.

بررسی گزاره‌ها:

الف) اگر مجموعه‌ی A را برابر مجموعه‌ی $\{۱\}$ اختیار کنیم، بدیهی است که قرینه‌ی آن یعنی -۱ در این مجموعه وجود ندارد. لذا این گزاره نادرست است.

ب) مجموعه‌ی A را برابر هر یک از مجموعه‌های $\{۱\}$ یا $\{۱,-۱\}$ اختیار کنیم، چون وارون ۱ و -۱ خود این اعداد هستند، لذا وارون ضربی هر عضو A در این مجموعه وجود دارد. پس این گزاره درست است.

ج) عضو همانی ضرب یعنی عدد ۱ در هر دو مجموعه‌ی $\{۱\}$ و $\{۱,-۱\}$ وجود دارد. پس این گزاره نیز درست است.

۲۶- (۲) کسر $\frac{n(n+۱)}{n^۲+۷}$ باید کوچک‌تر از واحد باشد، پس:

$$\frac{n(n+۱)}{n^۲+۷}<۱ \Rightarrow n^۲+n<n^۲+۷ \Rightarrow n<۷ \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} n\in\{۱,۲,...,۶\}$$

حال به ازای هر یک از اعضای این مجموعه، کسر متعارفی $A=\frac{n^۲+n}{n^۲+۷}$ را تعیین می‌کنیم:

$$n=۱\Rightarrow A=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴} \qquad n=۲\Rightarrow A=\frac{۶}{۱۱}$$

$$n=۳\Rightarrow A=\frac{۱۲}{۱۶}=\frac{۳}{۴} \qquad n=۴\Rightarrow A=\frac{۲۰}{۲۳}$$

$$n=۵\Rightarrow A=\frac{۳۰}{۳۲}=\frac{۱۵}{۱۶} \qquad n=۶\Rightarrow A=\frac{۴۲}{۴۳}$$

بدیهی است که کسرهای $\frac{۱}{۴}$، $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۱۵}{۱۶}$ دارای بسط اعشاری پایان‌پذیر (مختوم) و کسرهای $\frac{۶}{۱۱}$، $\frac{۲۰}{۲۳}$ و $\frac{۴۲}{۴۳}$ دارای بسط اعشاری متناوب ساده هستند.

۲۷- (۴)

نکته: بسط اعشاری یک کسر متعارفی تحویل ناپذیر، وقتی متناوب مرکب است که مخرج کسر دارای عامل‌های اول ۲ یا ۵ یا هر دو و در عین حال دارای حداقل یک عامل اول به جز ۲ و ۵ باشد.

چون کسر $\frac{۲n}{۴۵}$ کوچک‌تر از واحد است، پس داریم:

$$\frac{۲n}{۴۵}<۱\Rightarrow ۲n<۴۵\Rightarrow n<۲۲/۵ \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} n\in\{۱,۲,...,۲۲\}$$

چون کسر $\frac{۲n}{۴۵}=\frac{۲n}{۳^۲\times ۵}$ متناوب مرکب است، لذا باید عدد n را از مجموعه‌ی $\{۱,۲,...,۲۲\}$ به گونه‌ای تعیین کنیم که عامل ۵ و حداقل یک عامل ۳ در مخرج کسر باقی بماند و با صورت کسر ساده نشود. بنابراین عدد n باید مضرب ۵ یا مضرب ۹ نباشد. بنابراین باید ۶ عدد ۵، ۱۰، ۱۵، ۲۰، ۹ و ۱۸ را از مجموعه‌ی ۲۲ عضوی $\{۱,۲,...,۲۲\}$ حذف کنیم. لذا به‌ازای ۱۶ مقدار طبیعی n باقی‌مانده در این مجموعه، کسر کوچک‌تر از واحد $\frac{۲n}{۴۵}$ دارای بسط اعشاری متناوب مرکب است.

۲۸- (۳) طبق فرض عدد $\frac{a\sqrt{۳}+۲}{\sqrt{۳}+b}$ و بسط اعشاری $۰/\overline{c}$ برابر $\frac{۱}{۳}$ هستند. داریم:

$$۰/\overline{c}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow \frac{c}{۹}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow c=۳$$

$$\frac{a\sqrt{۳}+۲}{\sqrt{۳}+b}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow ۳a\sqrt{۳}+۶=\sqrt{۳}+b$$

برای این‌که تساوی فوق برقرار باشد، لازم است داشته باشیم $b=۶$ و $a=\frac{۱}{۳}$.
در نتیجه:

$$b-ac=۵$$

۲۹- (۱)

نکته: فرض کنید a، b، c و d اعدادی گویا و x عددی گنگ باشد، در این صورت:

الف) اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$، آن‌گاه عدد $\frac{ax+b}{cx+d}$، گویا است.

ب) اگر $\frac{a}{b}\neq\frac{c}{d}$، آن‌گاه عدد $\frac{ax+b}{cx+d}$، گنگ است.

چون عدد $\frac{a\sqrt{۲}+۱}{۳\sqrt{۲}+a-۲}$ گویا است، باید داشته باشیم:

$$\frac{a}{۱}=\frac{۳}{a-۲}\Rightarrow a^۲-۲a=۳\Rightarrow a^۲-۲a-۳=۰$$

$$\Rightarrow (a+۱)(a-۳)=۰\Rightarrow a=-۱ \text{ یا } a=۳$$

به ازای $a=-۱$ داریم:

$$\frac{a\sqrt{۲}+۱}{۳\sqrt{۲}+a-۲}=\frac{-\sqrt{۲}+۱}{۳\sqrt{۲}-۳}=\frac{-\sqrt{۲}+۱}{-۳(-\sqrt{۲}+۱)}=-\frac{۱}{۳}$$

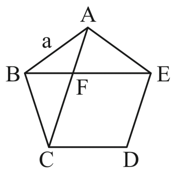
به ازای $a=۳$ داریم:

$$\frac{a\sqrt{۲}+۱}{۳\sqrt{۲}+a-۲}=\frac{۳\sqrt{۲}+۱}{۳\sqrt{۲}+۱}=۱$$

طبق فرض باید کسر $\frac{a\sqrt{۲}+۱}{۳\sqrt{۲}+a-۲}$ گویا و مثبت باشد، لذا مقدار $\frac{-۱}{۳}$ برای این کسر قابل قبول نیست و تنها به ازای $a=۳$، مقدار این کسر برابر عدد گویا و مثبت ۱ می‌شود.

۳۰- (۲)

نکته: طبق قضیه‌ی هیپاسوس، در هر ۵ ضلعی منتظم به ضلع a نسبت طول قطر به طول ضلع، عددی گنگ است. بنابراین با توجه به شکل اگر دو قطر AC و BE هم‌دیگر را در نقطه‌ی F قطع کنند، داریم:



$$۱)\ AF=BF=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}a$$

$$۲)\ FC=FE=a$$

$$۳)\ AC=BE=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}a$$

با توجه به نکته‌ی فوق به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

بررسی گزینه‌ها:

گزینه‌ی (۱): اگر $a=\sqrt{۵}+۱$ فرض شود، داریم:

$$AF=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}a\Rightarrow AF=\frac{(\sqrt{۵}-۱)}{۲}(\sqrt{۵}+۱)=\frac{۵-۱}{۲}=۲$$

بنابراین AF همواره عددی گنگ نمی‌باشد و این گزینه نادرست است.

گزینه‌ی (۳): اگر $a=\sqrt{۵}-۱$ فرض شود، داریم:

$$AC=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}a\Rightarrow AC=\left(\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}\right)(\sqrt{۵}-۱)=\frac{۵-۱}{۲}=۲$$

بنابراین قطر AC نیز همواره عددی گنگ نبوده و این گزینه هم نادرست است.

گزینه‌ی (۲): طبق نکته‌ی فوق، FC برابر با طول ضلع پنج ضلعی منتظم بوده و چون ضلع طبق فرض تست عددی گنگ است، نتیجه می‌گیریم FC نیز همواره عددی گنگ است.

آزمون دوم

نامساوی‌ها ـ بازه و همسایگی

سطح (۱)

۱- کدام گزاره درست است؟

۱) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 6x + 9 > 0$
۲) $\exists x \in \mathbb{N} : x^2 + 6x + 5 \le 0$
۳) $\nexists x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x < -4$
۴) $\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 - 3x + 2 < 0$

۲- اگر برای هر عدد حقیقی $\varepsilon > 0$ داشته باشیم $2 \le a^2 - |a| < 2 + \varepsilon$، حاصل $\max\{a, -a\}$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۳- اگر p، q و r اعداد حقیقی، $r < 0$، $pq \neq 0$ و $pr > qr$ باشد، آن‌گاه کدام گزینه همواره برقرار است؟ (سراسری ریاضی ۶۹)

۱) $-p > -q$
۲) $-p > q$
۳) $q > -p$
۴) $p > q$

۴- اگر a و b دو عدد باشند و $a < b$، آن‌گاه کدام نامساوی همواره برقرار است؟ (سراسری ریاضی ۷۶)

۱) $a^2 < b^2$
۲) $a^3 < b^3$
۳) $b^2 < a^2$
۴) $b^3 < a^3$

۵- از دو نامساوی $a > b$ و $c > d$، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $2a - 3c > 2b - 3d$
۲) $2a - 3d < 2b - 3c$
۳) $2a - 3c < 2b - 3d$
۴) $2a - 3d > 2b - 3c$

۶- برد تابع $y = (2\sin x - 1)^2$ کدام است؟

۱) $[1, 9]$
۲) $[0, 4]$
۳) $[0, 9]$
۴) $[1, 4]$

۷- مجموعه جواب نامعادله‌ی $\frac{x-1}{2} \le 5 - 2x < \frac{5-x}{3}$، چگونه است؟

۱) بازه‌ی کران‌دار و فقط شامل نقطه‌ی انتهایی راست
۲) بازه‌ی کران‌دار و فقط شامل نقطه‌ی انتهایی چپ
۳) بازه‌ی کران‌دار و شامل نقاط انتهایی
۴) بازه‌ی بی‌کران

۸- مجموعه جواب نامعادله‌ی $\sqrt{x^2 - 1} < x$ چگونه است؟

۱) تهی
۲) یک بازه‌ی از راست بی‌کران
۳) یک بازه‌ی کران‌دار
۴) یک بازه‌ی از چپ بی‌کران

۹- مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x + 2| < \frac{1}{2}x + 4$ یک بازه‌ی متقارن:

۱) به مرکز صفر و شعاع ۴ است.
۲) به مرکز صفر و شعاع ۲ است.
۳) به مرکز ۲- و شعاع ۲ است.
۴) به مرکز ۲- و شعاع ۴ است.

۱۰- مجموعه جواب معادله‌ی $3[x] + 5[-x] = 1$ یک بازه‌ی متقارن با کدام نقطه‌ی میانی است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) $-2/5$
۲) -2
۳) $-1/5$
۴) -1

۱۱- اشتراک دو همسایگی به مرکزهای ۳ و ۴ و به‌ترتیب به شعاع‌های ۴ و ۵، یک همسایگی با چه مرکز و چه شعاعی است؟

۱) به مرکز $\frac{7}{2}$ و به شعاع $\frac{5}{2}$
۲) به مرکز ۴ و به شعاع ۳
۳) به مرکز $\frac{5}{2}$ و به شعاع $\frac{7}{2}$
۴) به مرکز ۳ و به شعاع ۴

۱۲- کدام‌یک از مجموعه‌های زیر، یک همسایگی محذوف به شعاع ۲ و به مرکز ۳ است؟

۱) $0 \le |x - 3| < 2$
۲) $[1, 5] - \{3\}$
۳) $\frac{1}{|x - 3|} > \frac{1}{2}$
۴) $0 < |x - 2| < 3$

۱۳- مجموعه جواب نامعادله‌ی $\frac{3}{|2x + 1|} > 5$ را به صورت $(a - \delta, a + \delta) - \{a\}$ نوشته‌ایم. δ کدام است؟

۱) $\frac{3}{10}$
۲) $\frac{6}{5}$
۳) $\frac{10}{3}$
۴) $\frac{5}{6}$

۱۴- اگر بازه‌ی $(1 - 3\alpha, 1 + 6\alpha) - \{a\}$ همسایگی محذوف به شعاع ۳ باشد، a کدام است؟ (مشابه سراسری ریاضی ۸۹)

۱) ۲
۲) $\frac{2}{3}$
۳) $\frac{3}{2}$
۴) $\frac{5}{2}$

سطح (۲)

۱۵- کدام گزینه درست نیست؟

۱) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : n > x$
۲) $\exists x \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : nx = n$
۳) $\nexists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : n < x$
۴) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} : nx = n$

۱۶- اگر برای هر عدد طبیعی n، نامساوی $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 < \frac{1}{n}$ برقرار باشد، $|x-y|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۷- اگر نامساوی $\frac{4}{n} + 2 > |x-3| > -\frac{2}{n} - 2$ به ازای جمیع مقادیر طبیعی n برقرار باشد، حاصل‌جمع مقادیر ممکن برای x کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۷

۱۸- اگر $b < a < 0$ باشد، کدام گزینه نادرست است؟ (مشابه آزاد تجربی ۷۴ و آزاد ریاضی ۷۷)

۱) $\sqrt[3]{a^2} < \sqrt[3]{b^2}$ ۲) $\frac{a}{b} < 1$ ۳) $\frac{1}{a-b} > 0$ ۴) $ab > 1$

۱۹- اگر $0 < a < 1$ و $1 < m < n$ باشد، کدام گزینه همواره برقرار است؟

۱) $a^{m^2} < a^{n^3}$ ۲) $a^{m^3} < a^{n^2}$ ۳) $a^{m^2} > a^{n^3}$ ۴) $a^{m^3} > a^{n^2}$

۲۰- اگر $a < b$ باشد، کدام نامساوی همواره درست است؟ (مشابه آزاد ریاضی ۸۹)

۱) $a(a^2+1) < b(b^2+1)$ ۲) $a(a^2-1) < b(b^2-1)$ ۳) $a(a-1) < b(b-1)$ ۴) $a(a+1) < b(b+1)$

۲۱- اگر a و b هم‌علامت و ناصفر باشند، حاصل $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) - 4$ همواره کدام است؟

۱) مثبت ۲) منفی ۳) نامثبت ۴) نامنفی

۲۲- اگر $x^2 \le 2x$ و $y^2 \le 2y + 3$، آن‌گاه:

۱) $|x+y| \le 3$ ۲) $|x+y| \le 1$ ۳) $|x-y| \le 1$ ۴) $|x-y| \le 3$

۲۳- اگر x به یک بازه‌ی متقارن به مرکز ۱- و شعاع ۲ تعلق داشته باشد و برای هر x داشته باشیم $|x| < k$، کم‌ترین مقدار k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۴- کدام گزینه در مورد مجموعه جواب نامعادله‌ی $[|x-1|] \le 2$ صحیح است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) بازه‌ی متقارن به مرکز ۱ و شعاع ۲ است.
۲) بازه‌ی متقارن به مرکز هیچ عددی نیست.
۳) بازه‌ی متقارن به مرکز ۳ و شعاع ۱ است.
۴) طول بازه‌ی مجموعه جواب ۶ است.

۲۵- مجموعه جواب xهای نامعادله‌ی $|2x - m| < x$، یک همسایگی به شعاع ۲ می‌باشد. مرکز این همسایگی کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۲۶- مجموعه‌ی $(\alpha, \beta - 1) \cup (\alpha + 2, \alpha + \beta)$ همسایگی محذوف کدام نقطه‌ی زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۵

۲۷- دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-[x]}$: ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) یک همسایگی به شعاع ۱ است.
۲) یک همسایگی به مرکز ۱ است.
۳) یک همسایگی محذوف به شعاع ۱ است.
۴) یک همسایگی محذوف به مرکز ۱ است.

۲۸- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{\sqrt{6-x-x^2}}{[x]+[-x]}$ در همسایگی محذوف چند نقطه تعریف شده است، به طوری که در هیچ همسایگی از آن نقاط، تعریف شده نیست؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۳

سطح (۳)

۲۹- کدام گزینه درست است؟

۱) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} : x > y$
۲) $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N} : x > y$
۳) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0$
۴) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y = 0$

۳۰- اگر نامساوی $0 \le [x+1]4^a < 1$ برای هر $a \in \mathbb{R}$ برقرار باشد، مجموعه جواب x کدام است؟

۱) $\{\pm 1\}$ ۲) $[-1, 0)$ ۳) $[0, 1)$ ۴) $\{-1\}$

۳۱- اگر $\frac{1}{c} < \frac{a}{b}$ باشد، کدام نتیجه همواره درست است؟

۱) $ac > b$ ۲) $\frac{b}{a} < c$ ۳) $\frac{a^3}{b} > \frac{a^2}{c}$ ۴) $\frac{ac^2}{b} > c$

۳۲- اگر چهار عدد $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ و $\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ و $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ و $\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ را به‌صورت $d < c < b < a$ مرتب کنیم، حاصل ad کدام است؟

۱) $(2^4 \times 3^3)^{-\frac{1}{12}}$ ۲) $(3^4 \times 2^3)^{-\frac{1}{12}}$ ۳) $(2^2 \times 3^3)^{-\frac{1}{6}}$ ۴) $(2^3 \times 3^2)^{-\frac{1}{6}}$

۳۳- جواب‌هایی از نابرابری $\left||2x|-4\right| < \frac{1}{50}$ که در بازه‌ی $(1/998 , 2/1)$ قرار دارد، به‌صورت یک بازه‌ی کران‌دار است. نقطه میانی این بازه کدام است؟

۱) ۲/۰۴۹ ۲) ۲ ۳) ۲/۰۵ ۴) ۲/۰۰۴

۳۴- مجموعه جواب‌هایی از نابرابری $\sqrt{x^2-4} < \frac{\sqrt{41}}{10}$ که در بازه‌ی متقارن $(-2-\frac{1}{10} , -2+\frac{1}{10})$ قرار دارد، کدام وضعیت را دارا است؟

۱) بازه‌ای کران‌دار شامل نقطه‌ی انتهایی راست
۲) بازه‌ای کران‌دار شامل نقطه‌ی انتهایی چپ
۳) بازه‌ای کران‌دار شامل نقاط انتهایی
۴) بازه‌ای کران‌دار و فاقد نقاط انتهایی

۳۵- یک همسایگی به مرکز a و شعاع بیشترین مقدار ممکن، زیرمجموعه‌ی $\left\{x : \left|\frac{x-2}{2x+1}\right| < 1\right\}$ است. a کدام است؟

(مشابه سراسری ریاضی ۸۹ خارج از کشور)

۱) $-\frac{7}{4}$ ۲) $-\frac{4}{3}$ ۳) $-\frac{5}{3}$ ۴) $-\frac{5}{4}$

۳۶- مجموعه جواب x های نامعادله‌ی $m^2-1 < |3x+1| < 2m+3$، یک همسایگی محذوف است. مجموعه جواب شعاع‌های همسایگی آن کدام است؟

۱) $\left\{\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right\}$ ۲) $\{1, 5\}$ ۳) $\{\pm 1\}$ ۴) $[1, 5]$

۳۷- اگر $(1, 2x) - \{y\}$ و $(\frac{2}{3}x, z) \cup (z, 3)$ همسایگی محذوف عدد t باشند، حاصل $x + y + z + t$ کدام است؟

۱) $\frac{13}{2}$ ۲) $\frac{15}{2}$ ۳) $\frac{11}{2}$ ۴) $\frac{9}{2}$

۳۸- اگر $A_n = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n})$ باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ یک .... نقطه‌ی .... است.

۱) همسایگی - $\frac{3}{2}$
۲) همسایگی محذوف - $\frac{3}{2}$
۳) همسایگی - ۱
۴) همسایگی محذوف - ۱

۳۹- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{\sqrt{2-x-x^2}}{x([-x]-1)}$ در کدام نقطه تعریف شده است، به طوری که در هیچ‌یک از همسایگی‌های چپ و راست آن نقطه تعریف شده <u>نیست</u>؟

۱) ۱- ۲) ۲- ۳) ۱ ۴) ۲