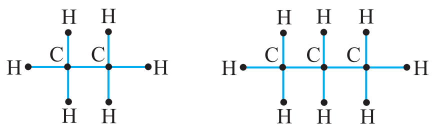
فصل اول
جلسه اول ۱
CHAPTER ONE

آشنایی با گراف و مقدمات آن

آیا تا به حال به نقشه‌ی راه‌های یک کشور توجه کرده‌اید، که در آن شهرها را با نقاط و راه‌های بین آن‌ها را با خطوط مستقیم یا مایل نمایش می‌دهند؟

یا مثلاً در درس شیمی با نمودارهایی که ساختار مواد را تشکیل می‌دهند آشنا شده‌اید. در این نمودارها عناصر توسط خطوطی که نماینده‌ی پیوند بین آن‌ها است به هم متصل شده‌اند.



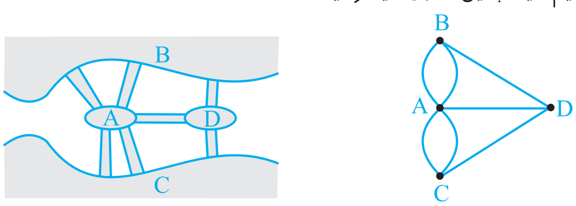
در تمام این موارد یا موارد مشابه آن‌ها، در حال رسم گراف می‌باشیم. در واقع گراف مجموعه‌ای از نقاط است که بعضی از این نقاط توسط پاره‌خط‌هایی به هم متصل شده‌اند. راستی می‌دانید نظریه‌ی گراف‌ها چگونه به‌وجود آمد؟

معمای پل‌های شهر کونیگسبرگ

در قرن هجدهم میلادی، شهر کونیگسبرگ از دو ساحل یک رودخانه و دو جزیره تشکیل شده بود و هفت پل، این چهار منطقه را به یکدیگر وصل کرده بود. بین مردم این شهر این معما وجود داشت که آیا می‌توان با آغاز از یکی از این مناطق و عبور از هر پل دقیقاً یک بار در شهر گشتی زد و به منطقه‌ی آغاز بازگشت؟

لئونارد اویلر [۱۷۸۳-۱۷۰۱ م] ریاضی‌دان مشهور سوئیسی (امسال ما با ایشان خیلی کار داریم) با دیدن این مسأله، آن را تبدیل به طرحی ساده از نقاط و پاره‌خط‌ها نمود و نام آن را گراف گذاشت. در واقع هر منطقه را یک نقطه و هر پل را یک پاره‌خط یا کمان بین منطقه‌ها در نظر گرفت و بدین ترتیب نظریه‌ی گراف شکل گرفت. حتماً می‌پرسید جواب معمای شهر کونیگسبرگ چه شد؟

با زیاد شدن معلوماتمان در مبحث گراف خواهیم دید چنین کاری میسر نیست!



نمایی از پل‌های شهر کونیگسبرگ و گراف مربوط به آن

گراف

تعریف: اگر $V=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ مجموعه‌ای ناتهی از نقاط و مجموعه‌ی $A=\{\{a_1a_2\},\{a_1a_3\},\dots,\{a_1a_n\},\{a_2a_3\},\dots,\{a_{n-1}a_n\}\}$ (مجموعه‌ی تمام پاره‌خط‌های ممکن بین نقاط مجموعه‌ی V) مفروض باشند، آن‌گاه به شرط آن که $E\subseteq A$ باشد، $G=(V,E)$ را یک **گراف ساده** می‌گوییم.

تعریف: به مجموعه‌ی نقاط، **رئوس گراف** و به مجموعه‌ی پاره‌خط‌ها، **یال‌های گراف** می‌گوییم.

تذکر: نیازی نیست یال‌های گراف، پاره‌خط‌های مستقیم باشند. ممکن است خطوط منحنی یا شکسته باشند.

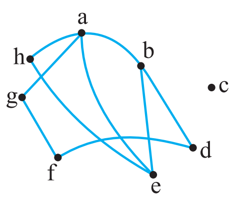
به‌طور معمول رئوس گراف را با حروف کوچک انگلیسی و نام گراف را با حروف بزرگ انگلیسی نمایش می‌دهیم.

قرارداد: اگر u و v دو رأس از گراف G و همچنین $\{u,v\}$ یک یال آن باشد ($u,v\in V(G)$ و $\{u,v\}\in E(G)$)، آن‌گاه برای سادگی به جای $\{u,v\}$ می‌نویسیم uv و می‌گوییم دو رأس u و v در G **مجاور** هستند.

به گراف روبه‌رو توجه کنید:

در این گراف مجموعه‌ی رئوس عبارت است از: $V=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$

و مجموعه‌ی یال‌های گراف عبارت است از: $E=\{ab,ae,ag,ah,bd,be,df,eh,fg\}$

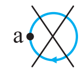


شکل (۱)

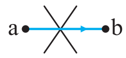
گراف ساده

یک گراف، در صورتی گراف ساده است که:

۱- طوقه نداشته باشد. (طوقه یالی است که از یک رأس به خودش رسم شود.)



۲- یال‌ها جهت نداشته باشند.



۳- یال موازی نداشته باشد. (یال موازی یعنی بین دو رأس بیش از یک یال باشد.)

توجه: در فصل گراف‌ها ما با گراف‌های ساده سروکار داریم، پس هر جا کلمه‌ی گراف به کار رفت منظورمان گراف ساده است.

چند اصطلاح در مبحث گراف

مرتبه: به تعداد رئوس یک گراف، مرتبه‌ی گراف می‌گوییم و آن را با p نمایش می‌دهیم. $p = |V|$

اندازه: به تعداد یال‌های گراف، اندازه‌ی گراف می‌گوییم و آن را با q نمایش می‌دهیم. $q = |E|$

درجه‌ی هر رأس از گراف: درجه‌ی هر رأس از گراف برابر است با تعداد یال‌هایی که به آن رأس متصل است و درجه‌ی رأس a را با $\deg(a)$ نمایش می‌دهیم.

رأس زوج: رأسی است که درجه‌ی آن زوج باشد.

رأس فرد: رأسی است که درجه‌ی آن فرد باشد.

رأس منفرد: رأسی که به هیچ رأسی متصل نباشد، رأس منفرد نامیده می‌شود. در واقع درجه‌ی این رأس صفر است.

دو رأس مجاور: دو رأسی هستند که توسط یک یال به هم متصل باشند.

اگر بین دو رأس یالی نباشد، می‌گوییم دو رأس غیر مجاورند.

دنباله‌ی درجه‌ی رئوس گراف: دنباله‌ای نزولی است که جملات آن درجه‌ی رئوس گراف است. در واقع درجه‌ی رئوس گراف را از بیش‌ترین تا کم‌ترین می‌نویسیم. تعداد اعضای این دنباله برابر با مرتبه‌ی گراف است.

به عنوان مثال، اگر به گراف شکل (۱) توجه کنیم، خواهیم داشت: $p = ۸, q = ۹$

در این گراف رأس c، منفرد است و مثلاً دو رأس e و a مجاورند ولی e و d مجاور نیستند.

در این گراف درجات رئوس عبارتند از:

$$\deg(a) = ۴, \deg(b) = ۳, \deg(c) = ۰, \deg(d) = ۲, \deg(e) = ۳, \deg(f) = ۲, \deg(g) = ۲, \deg(h) = ۲$$

و دنباله‌ی درجه‌ی رئوس گراف برابر است با: $۴,۳,۳,۲,۲,۲,۲,۰$

اگر در گراف موردنظر، مجموع درجه‌ی رئوس را محاسبه کنیم، حاصل دو برابر تعداد یال‌ها خواهد بود. این رابطه در گراف‌های دیگر نیز برقرار است.

قضیه: مجموع درجه‌ی رئوس هر گراف ساده، دو برابر اندازه‌ی گراف است.

اثبات: در شمارش مجموع درجه‌ی رئوس، هر یال مانند یال xy دو بار محاسبه می‌شود. یک بار برای محاسبه‌ی درجه‌ی رأس x و یک بار برای محاسبه‌ی درجه‌ی رأس y. پس مجموع درجه‌ی رئوس برابر است با دو برابر تعداد یال‌ها.

بنابراین اگر گرافی از مرتبه‌ی p با رئوس a_1، a_2، ... و a_i باشد، داریم:

$$\sum_{i=۱}^{p} \deg(a_i) = ۲q$$

نتیجه: تعداد رئوس فرد در هر گراف عددی زوج است.

اثبات: مجموع درجه‌ی رئوس زوج که عددی زوج است و مجموع کل درجه‌ی رئوس هم برابر با $۲q$ است که عددی زوج می‌باشد، بنابراین داریم:

عددی زوج = (مجموع درجه‌ی رئوس زوج) − $۲q$ = مجموع درجه‌ی رئوس فرد

پس مجموع درجه‌ی رئوس فرد هم عددی زوج است که این زمانی اتفاق می‌افتد که تعداد رئوس فرد عددی زوج باشد.

مثال ۱: تعداد رئوس زوج یک گراف از مرتبه‌ی ۱۳۹۳ کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۱) ۱۳۹۲ ۲) ۱۰۰۰ ۳) ۹۹۹ ۴) ۶۶۶

پاسخ: در هر گراف تعداد رئوس فرد، عددی زوج است، پس در این گراف به تعداد $۱۳۹۳ - ۲k$ رأس زوج وجود دارد که این عددی فرد است و تنها گزینه‌ی (۳) قابل قبول است.

نکته: تعداد رئوس زوج در هر گراف مشابه مرتبه‌ی گراف است. یعنی اگر گراف تعداد زوج رأس داشته باشد، تعداد رئوس زوج نیز عددی زوج است و اگر گراف تعداد فرد رأس داشته باشد، تعداد رئوس زوج نیز عددی فرد است.

مثال ۲: گرافی از اندازه‌ی ۲۴، دارای ۷ رأس درجه‌ی ۲، ۳ رأس درجه‌ی ۳، یک رأس درجه‌ی ۵ می‌باشد و بقیه‌ی رأس‌ها از درجه‌ی ۴ است. مرتبه‌ی این گراف کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۶ ۳) ۱۵ ۴) ۱۴

پاسخ: فرض کنیم x رأس درجه‌ی ۴ داریم، بنابراین:

$$\sum_{i=1}^{p} \deg(a_i) = 2q$$

$$7\times 2+3\times 3+1\times 5+x\times 4=2\times 24 \Rightarrow 4x=48-14-9-5=20 \Rightarrow x=5$$

$$\Rightarrow p=7+3+1+5=16$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

دنباله‌ی گرافی و تشخیص آن

یکی از مسائل مهم مبحث گراف، تشخیص گرافی بودن یک دنباله است.

گاهی دنباله‌ای از اعداد داده می‌شود که ممکن است دنباله‌ی درجه‌ی رئوس یک گراف باشد. در این صورت می‌گوییم این دنباله یک دنباله‌ی گرافی است. تا اینجا متوجه شدیم که باید تعداد رئوس فرد گراف عددی زوج باشد، ولی آیا این شرط کافی است؟

مثال ۳: آیا با دنباله‌ی ۵,۴,۲,۲,۱ می‌توان گراف رسم کرد؟

پاسخ: تعداد رئوس فرد در این دنباله دو عدد است که مشکلی ایجاد نمی‌کند. ولی توجه کنید که این دنباله شامل ۵ رأس است و نمی‌تواند رأسی با درجه‌ی ۵ داشته باشد، زیرا گراف ساده می‌باشد و هر رأس حداکثر به ۴ رأس دیگر می‌تواند متصل شود، پس این دنباله، گرافی نمی‌باشد.

با توجه به مثال قبل می‌توان نکته‌ی زیر را بیان کرد:

نکته: در گراف مرتبه‌ی p داریم: $1\leq i\leq p \ , \ 0\leq \deg(a_i)\leq p-1$

مثال ۴: آیا دنباله‌ی ۴,۳,۳,۲,۰,۰ گرافی است؟

پاسخ: در گراف‌هایی که رأس درجه‌ی صفر دارند، برای تشخیص گرافی بودن، آن‌ها را در نظر نمی‌گیریم و باقی دنباله را بررسی می‌کنیم. در اینجا باید دنباله‌ی ۴,۳,۳,۲ بررسی شود که با توجه به این‌که ۴ رأسی است، نمی‌تواند رأس درجه‌ی ۴ داشته باشد. پس این دنباله، دنباله‌ی درجه‌ی رئوس یک گراف نیست.

نکته‌ی فوق را می‌توان به صورت زیر کامل‌تر کرد:

نکته: در گراف مرتبه‌ی p داریم: $0\leq \deg(a_i)\leq p-1-$ (تعداد رئوس درجه‌ی صفر) $, \ 1\leq i\leq p$

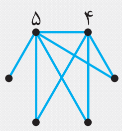
مثال ۵: آیا دنباله‌ی ۴,۴,۴,۲,۲ دنباله‌ی درجه‌ی رئوس یک گراف است؟

پاسخ: در این دنباله تعداد رئوس فرد، صفر است که عددی زوج است و در گراف ۵ رأسی می‌توانیم رأس درجه‌ی ۴ داشته باشیم. ولی دقت کنید که رأس درجه‌ی ۴ در گراف ۵ رأسی، یعنی رأسی که به همه‌ی رئوس متصل است. پس با وجود ۳ رأس درجه‌ی ۴ باید درجه‌ی باقی رئوس حداقل ۳ باشد، بنابراین با این دنباله نمی‌توان گراف رسم کرد.

نکته: اگر در گراف p رأسی، k رأس از درجه‌ی $p-1$ (درجه‌ی فول) داشته باشیم، درجه‌ی باقی رئوس حداقل k است.

مثال ۶: آیا دنباله‌ی ۵,۴,۳,۲,۱,۱ دنباله‌ی گرافی است؟

پاسخ: در این دنباله، مشکل تعداد رأس درجه‌ی فرد را نداریم. در ضمن در گراف ۶ رأسی می‌توان رأس درجه‌ی ۵ داشت. یک روش این است که گراف را رسم کنیم. اگر در گراف ۶ رأسی دو رأس درجه‌ی ۵ و ۴ را رسم کنیم، مشاهده می‌کنیم که نمی‌توانیم بیش از یک رأس درجه‌ی ۱ داشته باشیم. پس با این دنباله نمی‌توان گراف رسم کرد.



توجه: اگر در گرافی مشکل تعداد رئوس درجه‌ی فرد و رأس با درجه‌ی بیش‌ترین وجود نداشت، یکی از روش‌های مناسب، رسم گراف است و البته می‌توانیم از روش هاول- حکیمی هم استفاده کنیم.

روش هاول- حکیمی برای تشخیص گرافی بودن دنباله

در این روش، رأس با درجه‌ی max را حذف می‌کنیم و به اندازه‌ی درجه‌ی حذف شده به‌ترتیب از باقی رئوس یک واحد کم می‌کنیم. مثلاً اگر رأسی با درجه‌ی ۳ حذف شود، از درجه‌ی ۳ رأس بعدی، هر کدام یک واحد کم می‌کنیم. توجه داشته باشید که در تمام مراحل باید ترتیب نزولی بودن دنباله رعایت شود. اگر با ادامه دادن این روند به دنباله‌ی ثابت صفر برسیم، دنباله‌ی اولیه یک دنباله‌ی گرافی است و در غیر این صورت با دنباله‌ی داده شده نمی‌توان گراف رسم کرد.

البته اگر در هر مرحله‌ای بتوان تشخیص داد که دنباله قابل رسم یا غیرقابل رسم است کار را متوقف می‌کنیم.

به نمونه‌های زیر توجه کنید:

دنباله‌ی (۲) : ~~۴~~ , ۴ , ۴ , ۴ , ۲ , ۲

۳ , ۳ , ۳ , ۱ , ۲ — ترتیب نزولی رعایت شود.

~~۳~~ , ۳ , ۳ , ۲ , ۱

~~۲~~ , ۲ , ۱ , ۱

۱ , ۰ , ۱ — ترتیب نزولی رعایت شود.

~~۱~~ , ۱ , ۰

۰ , ۰

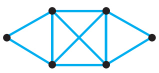
دنباله‌ی (۱) : ~~۴~~ , ۴ , ۴ , ۲ , ۲

~~۳~~ , ۳ , ۱ , ۱

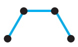
۲ , ۰ , ۰

با این دنباله نمی‌توان گراف رسم کرد.

دنباله‌ی (۲) گرافی است و گراف آن به‌صورت مقابل است:



توجه کنید که همواره ترتیب نزولی بودن دنباله را رعایت کنید. در دنباله‌ی (۲) در مراحل قبلی به دنباله‌ی ۲,۲,۱,۱ رسیدیم که این دنباله به‌صورت گراف مقابل رسم می‌شود، پس در همان جا می‌توانستیم کار را تمام کنیم.



مثال ۷: کدام‌یک از دنباله‌های زیر، می‌تواند دنباله‌ی درجات رئوس یک گراف ساده باشد؟ (آزمون‌های گاج)

۱) ۵,۵,۳,۳,۱,۱ ۲) ۵,۴,۴,۳,۳,۳ ۳) ۵,۵,۴,۴,۲,۲ ۴) ۵,۴,۳,۲,۲,۲,۱

پاسخ : گزینه‌ی (۴) نادرست است. به دلیل این‌که دارای ۳ رأس درجه‌ی فرد است.

گزینه‌ی (۱) نادرست است به دلیل این‌که دو رأس درجه‌ی ۵ (فول) دارد، پس نمی‌تواند رأس درجه‌ی ۱ داشته باشد.

دنباله‌ی گزینه‌های (۲) و (۳) مشکل تعداد رأس درجه‌ی فرد و رأس max ندارند، پس یا باید سراغ رسم آن‌ها برویم یا روش هاول- حکیمی:

گزینه‌ی (۳) : ~~۵~~ , ۵ , ۴ , ۴ , ۲ , ۲

~~۴~~ , ۳ , ۳ , ۱ , ۱

~~۲~~ , ۲ , ۰ , ۰

۱ , −۱ , −۱

این دنباله قابل رسم نیست.

گزینه‌ی (۲) : ~~۵~~ , ۴ , ۴ , ۳ , ۳ , ۳

~~۳~~ , ۳ , ۲ , ۲ , ۲

۲ , ۱ , ۱ , ۲

این دنباله قابل رسم است و گراف آن به‌صورت مقابل است.

بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال ۸: ثابت کنید در هر گراف ساده حداقل ۲ رأس با درجه‌ی یکسان وجود دارد.

پاسخ : در گراف مرتبه‌ی p، درجه‌ی رئوس می‌تواند ۰ یا ۱ یا ۲ یا ... یا $p-1$ باشد. رأس درجه‌ی صفر رأسی است که به هیچ رأسی متصل نیست و رأس درجه‌ی $p-1$ به همه‌ی رئوس متصل است. پس در گراف همزمان رأس درجه‌ی صفر و $p-1$ نمی‌تواند ظاهر شود. بنابراین برای درجه‌ی رئوس، $p-1$ وضعیت وجود دارد و p رأس داریم. طبق اصل لانه‌ی کبوتر با توجه به اینکه $p > p-1$ است، پس حداقل دو رأس با درجه‌ی یکسان در هر گراف وجود دارد.

مثال ۹: بررسی کنید چه زمانی دنباله‌ی درجه‌ی رئوس یک گراف، تشکیل دنباله‌ی حسابی یا هندسی می‌دهد؟

پاسخ : دنباله‌ی درجه‌ی رئوس گراف را به‌صورت $d_1, d_2, d_3, \dots, d_m, d_n, \dots, d_p$ فرض می‌کنیم و با توجه به مثال قبل باید درجه‌ی رئوس حداقل ۲ رأس با هم برابر باشد، فرض کنیم که $d_m = d_n$ باشد. برای آن‌که این دنباله تشکیل دنباله‌ی حسابی دهد باید قدرنسبت دنباله صفر باشد، چون فقط با افزودن عدد صفر می‌توان d_m را به d_n تبدیل کرد، بنابراین تمامی جملات دنباله با هم برابر می‌شوند. در مورد دنباله‌ی هندسی هم به دلیل مشابه قدرنسبت باید یک باشد و باز هم تمامی جملات با هم برابر می‌شوند. (البته اگر تمام رئوس گراف از درجه‌ی صفر باشند در دنباله‌ی هندسی قدرنسبت هر عددی می‌تواند باشد.)

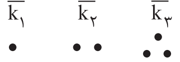
نکته: اگر دنباله‌ی درجه‌ی رئوس یک گراف تشکیل دنباله‌ی حسابی دهد، قدرنسبت برابر صفر است و اگر تشکیل دنباله‌ی هندسی دهد، قدرنسبت برابر یک است و در هر دو حالت تمامی اعداد دنباله با هم برابر می‌شوند.

معرفی چند نوع گراف

تعریف: **گراف تهی**، گرافی است که هیچ یالی نداشته باشد.

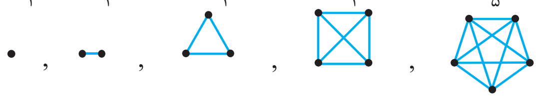
گراف تهی مرتبه‌ی p را با $\overline{k}_p$ نمایش می‌دهیم.

$\overline{k}_۱$ $\overline{k}_۲$ $\overline{k}_۳$



تعریف: **گراف کامل**، گراف ساده‌ای است که در آن تمام یال‌های ممکن رسم شده باشد. در واقع در این گراف هر رأس به تمام رئوس دیگر متصل است. گراف کامل مرتبه‌ی p را با k_p نمایش می‌دهیم و درجه‌ی هر رأس این گراف $p-۱$ است.

$k_۱$ ، $k_۲$ ، $k_۳$ ، $k_۴$ ، $k_۵$



با توجه به این‌که در گراف کامل، تمام یال‌های ممکن رسم شده است، پس تعداد یال‌ها برابر است با تعداد انتخاب‌های دو رأس از کل رئوس.

$$\text{تعداد یال‌های گراف کامل} = q_{k_p} = \binom{p}{۲} = \frac{p(p-۱)}{۲}$$

نکته: در گراف مرتبه‌ی p داریم: $\circ \le q \le \frac{p(p-۱)}{۲}$

مثال ۱۰: در گراف ساده‌ی $G=(V,E)$، مجموعه‌ی E دارای ۳۲ عضو است. حداقل تعداد اعضای مجموعه‌ی V کدام است؟ (آزمون‌های گاج)

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۱۰

پاسخ: با توجه به نکته‌ی فوق داریم: $q=۳۲ \le \frac{p(p-۱)}{۲}$. برای حل این نامساوی بهترین روش، جایگذاری گزینه‌ها می‌باشد:

$p=۸ \Rightarrow \frac{۸\times ۷}{۲}=۲۸$ ✗ ، $p=۹ \Rightarrow \frac{۹\times ۸}{۲}=۳۶$ ✓

$p=۱\circ \Rightarrow \frac{۱\circ\times ۹}{۲}=۴۵$ ✓ ، $p=۷ \Rightarrow \frac{۷\times ۶}{۲}=۲۱$ ✗

نامساوی به ازای $p=۹$ و $p=۱\circ$ برقرار است و حداقل مقدار $p=۹$ است، بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

نکته‌ی به‌دردنخور: از حل نامساوی $q \le \frac{p(p-۱)}{۲}$ برای p، به جواب $p \ge \frac{۱+\sqrt{۱+۸q}}{۲}$ می‌رسیم، ولی استفاده از گزینه‌ها روش مناسب‌تری می‌باشد.

مثال ۱۱: بین هر دو رأس دلخواه از گراف G یک یال وجود دارد. اگر اندازه‌ی گراف ۷ برابر مرتبه‌ی آن باشد، مرتبه‌ی این گراف کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

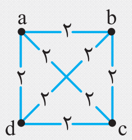
پاسخ: به جمله‌ی سؤال دقت کنید. وقتی بین هر دو رأس گراف یال وجود دارد، یعنی در گراف تمام رئوس به هم متصلند و این به معنی کامل بودن گراف است. پس:

$$q_{k_p} = \frac{\cancel{p}(p-۱)}{۲} = ۷\cancel{p} \Rightarrow p-۱=۱۴ \Rightarrow p=۱۵$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح است.

مثال ۱۲: با رئوس a، b، c و d چند گراف ساده می‌توان رسم کرد؟

پاسخ: با رئوس a، b، c و d می‌توان حداکثر $۶=\binom{۴}{۲}=\frac{۴\times ۳}{۲}$ یال رسم کرد (چرا؟). هر یک از این یال‌ها یا در گراف وجود دارند یا این‌که وجود ندارند. پس هر یال دارای ۲ حالت است و در کل $۲^۶=۶۴$ گراف می‌توان رسم کرد.



نکته: اگر رئوس گراف نام‌گذاری شده باشند، آن‌گاه: $\text{تعداد گراف‌های ساده با p رأس} = ۲^{\frac{p(p-۱)}{۲}} = ۲^{\binom{p}{۲}}$

مثال ۱۳: با رئوس a,b,c,d,e چند گراف ساده وجود دارد که یال‌های ab و ac را داشته باشد ولی شامل یال cd نباشد؟

۱) ۶۴ ۲) ۳۲ ۳) ۲۵۶ ۴) ۱۲۸

پاسخ: تعداد یال‌های ممکن $۱\circ=\frac{۵\times ۴}{۲}$ می‌باشد. گفتیم هر یال دارای ۲ حالت است ولی یال‌های ab و ac در گراف هستند، پس یک حالت بیش‌تر ندارند. یال cd هم که در گراف نیست و یک حالت دارد. پس تکلیف ۳ یال مشخص شده و ۷ یال دیگر هر کدام ۲ حالت دارند و در کل می‌توان $۲^۷=۱۲۸$ گراف رسم کرد. بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح است.

مثال ۱۴: با رئوس a,b,c,d,e چند گراف ساده می‌توان رسم کرد که رأس a منفرد باشد؟

۱) ۳۲　　۲) ۶۴　　۳) ۲۸　　۴) ۵۶

پاسخ: رأس a منفرد است، یعنی رأس a به هیچ رأسی متصل نیست. پس مثل این است که رأس a وجود ندارد و با ۴ رأس دیگر باید گراف را بسازیم، پس می‌توانیم $۲^{\frac{۴\times۳}{۲}}=۲^{۶}=۶۴$ گراف بسازیم. بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال ۱۵: با رئوس a,b,c,d چند گراف ساده از اندازه‌ی ۳ می‌توان رسم کرد؟

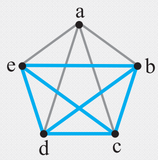
۱) ۳۰　　۲) ۱۵　　۳) ۲۰　　۴) ۲۴

پاسخ: با رئوس داده‌شده حداکثر می‌توانیم $\frac{۴\times۳}{۲}=۶$ یال رسم کنیم. ولی در گراف موردنظر فقط ۳ یال را می‌خواهیم. پس باید ۳ یال را از ۶ یال موجود انتخاب کنیم. بنابراین می‌توان به تعداد $\binom{۶}{۳}=۲۰$ گراف رسم کرد و گزینه‌ی (۳) صحیح است.

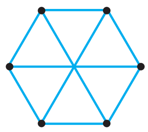
مثال ۱۶: با رئوس a,b,c,d,e چند گراف از اندازه‌ی ۵ می‌توان رسم کرد که $\deg(a)=۲$ باشد؟

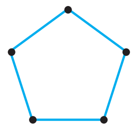
۱) ۳۰　　۲) ۱۲۰　　۳) ۶۰　　۴) ۹۰

پاسخ: ۴ یال می‌تواند به رأس a متصل شود (یال‌های ab ،ac ،ad و ae) ولی ما فقط ۲ تا از آن‌ها را می‌خواهیم پس به تعداد $\binom{۴}{۲}$ حالت یال‌های متصل به a را انتخاب می‌کنیم. از بین یال‌های غیرمتصل به رأس a (یال‌هایی که رنگی رسم شده‌اند) باید ۳ یال را انتخاب کنیم تا در کل، اندازه‌ی گراف ۵ شود که این کار به $\binom{۶}{۳}$ حالت میسر است و در کل $\binom{۶}{۳}\times\binom{۴}{۲}=۲۰\times۶=۱۲۰$ گراف می‌توان رسم کرد. بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.



تعریف: **گراف منتظم**، گرافی است که درجه‌ی تمام رئوس آن با هم برابر باشد.
اگر درجه‌ی تمام رئوس گراف r باشد آن را r−منتظم می‌نامیم.


۶ رأسی ۳- منتظم


۵ رأسی ۲- منتظم

توجه: هر گراف کامل، یک گراف $(p-1)$ – منتظم از مرتبه‌ی p و هر گراف تهی، یک گراف ۰ – منتظم است.

نکته: گراف فرد– منتظم از مرتبه‌ی فرد وجود ندارد. مثلاً نمی‌توانیم یک گراف، ۵ – منتظم از مرتبه‌ی ۱۱ داشته باشیم. به دلیل این‌که تعداد رئوس فرد باید زوج باشد.

در گراف r – منتظم، با توجه به این‌که درجه‌ی تمام رئوس r است، داریم:

$$\sum_{i=1}^{p}\deg(a_i)=۲q\Rightarrow p\times r=۲q\Rightarrow \text{(تعداد یال‌های گراف r - منتظم)}:\ q=\frac{rp}{۲}$$

مثال ۱۷: گراف G، ۳ – منتظم بوده و $q=۲p-۳$ است. مجموع مرتبه و اندازه‌ی گراف کدام است؟ (تمرین ۱ کتاب درسی– صفحه‌ی ۱۴)

۱) ۱۵　　۲) ۱۸　　۳) ۲۴　　۴) ۱۲

پاسخ:

$$\begin{cases}\text{گراف ۳ - منتظم}:\ q=\frac{۳p}{۲}\\ q=۲p-۳\end{cases}\Rightarrow\frac{۳p}{۲}=۲p-۳\Rightarrow\frac{p}{۲}=۳\Rightarrow p=۶$$

$q=۲\times۶-۳=۹\Rightarrow p+q=۱۵\Rightarrow$ گزینه‌ی (۱) صحیح است.

مثال ۱۸: کدام گراف وجود دارد؟

۱) گراف ۸ - منتظمی که $q=۳p+۵$ باشد.
۲) گراف ۱۰ - منتظم با ۴۰ یال
۳) گراف ۷ - منتظمی که مجموع مرتبه و اندازه‌ی آن ۴۵ باشد.
۴) گراف ۱۱ رأسی که دنباله‌ی درجه‌ی رئوس آن تشکیل دنباله‌ی حسابی داده باشد و عدد اول دنباله ۹ باشد.

پاسخ: گزینه‌ی (۱): $\begin{cases}q=\frac{۸p}{۲}\\ q=۳p+۵\end{cases}\Rightarrow ۴p=۳p+۵\Rightarrow p=۵\Rightarrow$ با گراف ۵ رأسی نمی‌توان رأس درجه‌ی ۸ ساخت. پس چنین گرافی وجود ندارد.

گزینه‌ی (۲): $q=\frac{10p}{2}=5p=40 \Rightarrow p=8 \Rightarrow$ با ۸ رأس نمی‌توان رأس درجه‌ی ۱۰ ساخت و چنین گرافی وجود ندارد.

گزینه‌ی (۳): $q=\frac{7p}{2} \Rightarrow p+q=p+\frac{7p}{2}=\frac{9p}{2}=45 \Rightarrow p=10 \Rightarrow$ چنین گرافی وجود دارد.

گزینه‌ی (۴): در گرافی که دنباله‌ی درجات رئوس آن تشکیل دنباله‌ی حسابی یا هندسی دهد، باید درجه‌ی تمام رئوس با هم برابر باشد (قبلاً اثبات شد.) پس گراف منتظم است. در اینجا یک گراف ۱۱ رأسی ۹ - منتظم داریم که چنین گرافی وجود ندارد (با توجه به نکته‌ی قبل).

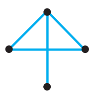
بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

ماکزیمم، مینیمم و میانگین درجات رئوس گراف

تعریف: به بزرگ‌ترین درجه‌ی رأس در بین درجات رئوس گراف، **ماکزیمم درجه‌ی رئوس گراف** می‌گوییم و آن را با Δ نمایش می‌دهیم.

تعریف: به کوچک‌ترین درجه‌ی رأس در بین درجات رئوس گراف، **مینیمم درجه‌ی رئوس گراف** می‌گوییم و آن را با δ نمایش می‌دهیم.

در گراف مقابل $\Delta=3$ و $\delta=1$ است.



نکته: اگر در گرافی $\delta=\Delta$ باشد، گراف منتظم است و بالعکس.

میانگین درجه‌ی رئوس گراف

$$\text{میانگین درجه‌ی رئوس گراف}=\frac{\text{مجموع درجه‌ی رئوس}}{\text{تعداد رئوس}}=\frac{2q}{p}$$

می‌دانیم که میانگین داده‌ها همواره بین بیش‌ترین و کم‌ترین داده می‌باشد. پس نامساوی مهم زیر را می‌توان بیان کرد:

$$\delta \le \frac{2q}{p} \le \Delta$$

مثال ۱۹: گرافی از اندازه‌ی ۳۱ و $\delta=5$ است. حداکثر مرتبه‌ی گراف کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۲ ۳) ۱۱ ۴) ۱۰

پاسخ:

$$\delta=5 \le \frac{2q}{p}=\frac{62}{p} \Rightarrow p \le \frac{62}{5}=12/4$$

با توجه به نامساوی به‌دست آمده، حداکثر مرتبه‌ی گراف، ۱۲ می‌باشد و گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال ۲۰: گرافی از مرتبه‌ی ۸ و $\Delta=5$ است. اندازه‌ی گراف چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۶ ۳) ۱۵ ۴) ۱۴

پاسخ: با توجه به نامساوی فوق، می‌توانیم بزرگ‌ترین اندازه‌ی گراف را به‌دست آوریم.

$$\frac{2q}{p}=\frac{2q}{8} \le \Delta=5 \Rightarrow 2q \le 40 \Rightarrow q \le 20$$

برای کم‌ترین مقدار q توجه کنید که باید گراف حداقل یک رأس با درجه‌ی ۵ داشته باشد. بنابراین حداقل اندازه‌ی گراف، ۵ است و بنابراین داریم $5 \le q \le 20$ و گزینه‌ی (۲) صحیح است.

تذکر: در حالت کلی در گرافی که $\Delta=k$ باشد، حداقل اندازه‌ی گراف k می‌باشد.

مثال ۲۱: گرافی از مرتبه‌ی ۸ و $\delta=4$ است. اندازه‌ی گراف چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟ (آزمون‌های گاج)

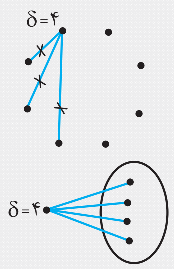
۱) ۱۲ ۲) ۱۱ ۳) ۱۰ ۴) ۹

پاسخ: باز هم با استفاده از نامساوی، می‌توانیم حداقل q را به‌دست آوریم:

$$\delta=4 \le \frac{2q}{p}=\frac{2q}{8} \Rightarrow 32 \le 2q \Rightarrow 16 \le q$$

برای به‌دست آوردن حداکثر اندازه‌ی گراف به دو روش می‌توانیم عمل کنیم.

روش اول: گراف کامل مرتبه‌ی ۸ دارای ۲۸ یال بوده و درجه‌ی هر رأس آن ۷ است. برای آن‌که رأسی با درجه‌ی ۴ داشته باشیم، باید حداقل از یک رأس ۳ یال را حذف کنیم.



پس داریم: $q_{max}=28-3=25$

روش دوم: یک رأس درجه‌ی ۴ داریم و با ۷ رأس دیگر ماکزیمم تعداد یال، یعنی گراف k_7، را بسازیم، پس داریم:

$$q_{max}=\frac{7\times 6}{2}+4=21+4=25$$

بنابراین خواهیم داشت: $16 \le q \le 25$ و گزینه‌ی (۳) صحیح است.

تذکر: هر زمان در سؤالی Δ و δ با هم داده شد، بهتر است که از نامساوی استفاده نشود. برای حل این سؤال‌ها اغلب با توجه به دنباله‌ی درجه‌ی رئوس، گراف با بیش‌ترین و کم‌ترین اندازه را می‌سازیم.

مثال ۲۲: **در گرافی $p=۱۰$ ، $\Delta=۷$ و $\delta=۲$ است. اندازه‌ی گراف کدام گزینه می‌تواند باشد؟** (آزمون‌های گاج)

۱) ۱۳ ۲) ۱۲ ۳) ۳۳ ۴) ۳۴

پاسخ: خوب احتمالاً با توجه به مثال‌های قبلی رفتید سراغ نامساوی و با تعجب می‌بینید که همه‌ی گزینه‌ها درستند!!!

$$\delta=۲\le\frac{۲q}{p}\le\Delta=۷\Rightarrow ۲۰\le ۲q\le ۷۰\Rightarrow ۱۰\le q\le ۳۵$$

پس این نامساوی در این سؤال کمکی نمی‌کند. اما برای آن‌که بیش‌ترین اندازه به‌دست آید باید تا می‌توانیم در دنباله تعداد درجات ۷ را زیاد کنیم. ما در دنباله قطعاً یک رأس درجه‌ی ۲ داریم، پس حداکثر ۹ رأس درجه‌ی ۷ می‌توان نوشت. ولی تعداد رئوس درجه‌ی فرد باید زوج باشد، پس ۸ رأس را درجه‌ی ۷ قرار می‌دهیم و رأس دیگر را حداکثر عدد زوج می‌گذاریم که ۶ است، پس خواهیم داشت:

دنباله‌ی درجه‌ی رئوس : $\underbrace{۷,۷,\dots,۷}_{\text{۸ تا}},۶,۲\Rightarrow ۲q_{max}=۸\times۷+۶+۲=۶۴\Rightarrow q_{max}=۳۲$

همین روش را در دنباله‌ی مینیمم انجام می‌دهیم. در اینجا قطعاً یک رأس درجه‌ی ۷ داریم و حداکثر ۹ رأس درجه‌ی ۲ می‌توان داشت که باز هم مشکل تعداد رئوس فرد وجود دارد. پس ۸ رأس را از درجه‌ی ۲ قرار می‌دهیم و رأس دیگر را مینیمم مقدار فرد یعنی عدد ۳ قرار می‌دهیم و خواهیم داشت:

دنباله‌ی درجه‌ی رئوس : $۷,۳,\underbrace{۲,\dots,۲}_{\text{۸ تا}}\Rightarrow ۲q_{min}=۷+۳+۸\times۲=۲۶\Rightarrow q_{min}=۱۳$

پس در مورد اندازه‌ی گراف داریم: $۱۳\le q\le ۳۲$ و گزینه‌ی (۱) صحیح است.

تذکر: اگر در گراف $\Delta=p-۱$ بود، حواستان به این باشد که حداکثر به اندازه‌ی δ می‌توانیم رأس با درجه‌ی Δ داشته باشیم. مثلاً اگر در همین تست $\Delta=۹$ و $\delta=۲$ بود، ما حداکثر می‌توانستیم ۲ رأس درجه‌ی ۹ داشته باشیم.

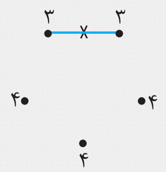
مسائلی در مورد ارتباط گراف کامل، Δ و δ

در بعضی مسائل مربوط به Δ و δ باید وضعیت گراف موردنظر را با گراف کامل هم‌مرتبه‌اش بررسی کنیم. یعنی گراف کامل هم‌مرتبه با گراف صورت سؤال را در نظر گرفته و با توجه به داده‌های مسأله تعدادی یال را حذف می‌کنیم. گاهی برای راحتی کار، یال‌های حذف شده را رسم می‌کنیم!

به مثال بعد توجه کنید:

مثال ۲۳: **گرافی از مرتبه‌ی ۵ و اندازه‌ی ۹ است. درجه‌ی چند رأس این گراف از درجه‌ی ماکزیمم است؟**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵



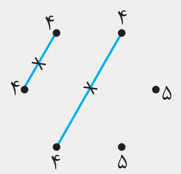
پاسخ: در گراف $k_۵$، $\frac{۵\times۴}{۲}=۱۰$ یال وجود دارد، پس باید یک یال از گراف $k_۵$ حذف کنیم تا به گراف موردنظر سؤال برسیم. برای راحتی کار، یال حذف شده را رسم می‌کنیم و درجه‌ی هر رأس را کنار آن می‌نویسیم. درجه‌ی رئوسی که یالی از آن‌ها حذف نشده برابر ۴ و درجه‌ی رئوسی که یال حذف شده دارند ۳ است. پس ۳ رأس از درجه‌ی $\Delta=۴$ داریم و گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال ۲۴: **گرافی از مرتبه‌ی ۶ و اندازه‌ی ۱۳ است. درجه‌ی چند رأس این گراف، از درجه‌ی مینیمم است؟**

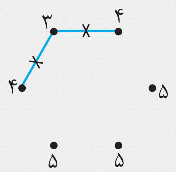
۱) ۱ یا ۳ ۲) ۲ یا ۳ ۳) ۲ یا ۴ ۴) ۱ یا ۴

پاسخ:

در اینجا با توجه به فرض مسأله باید از گراف $k_۶$ دو یال حذف کنیم. در این صورت دو گراف می‌توان رسم کرد که در یکی دو یال حذف‌شده با هم در یک رأس مشترک هستند و در دیگری رأس مشترک ندارند. به شکل‌های مقابل توجه کنید (که در آن‌ها یال‌های حذف شده را رسم کرده‌ایم و درجه‌ی هر رأس را کنار آن نوشته‌ایم):



(۲)



(۱)

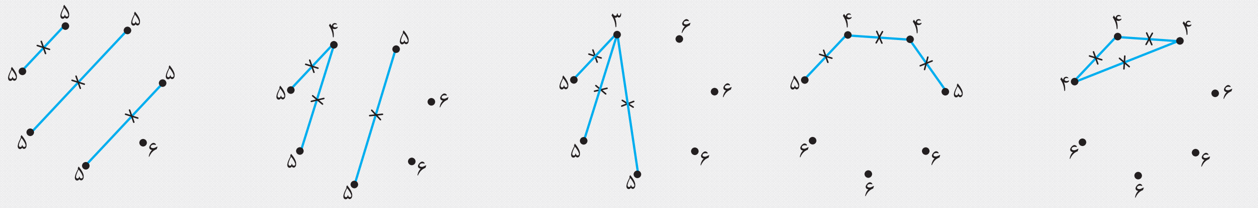
درجه‌ی هر رأس گراف $k_۶$ برابر ۵ است. با توجه به یال‌های حذف‌شده، درجه‌ی رئوس را به‌دست می‌آوریم:

در گراف شکل (۱)، یک رأس از درجه‌ی ۳ و $\delta=۳$ و در گراف شکل (۲)، ۴ رأس از درجه‌ی ۴ $\delta=۴$ وجود دارد و گزینه‌ی (۴) صحیح است.

مثال ۲۵: در گرافی $p=7$ و $q=18$ است. حداکثر چند رأس گراف از درجه‌ی Δ می‌باشد؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

پاسخ : در این مثال نسبت به گراف k_7، ۳ یال کم‌تر داریم. تمامی حالات حذف ۳ یال را رسم می‌کنیم.



حذف ۳ یال به‌صورت مثلثی — حذف ۳ یال متصل به هم — حذف ۳ یال از یک رأس — حذف ۲ یال متصل و یک یال جدا — حذف ۳ یال جدا از هم

در تمامی گراف‌ها $\Delta = 6$ است و به‌ترتیب از سمت چپ به تعداد ۱، ۲، ۳، ۳ و ۴ رأس از درجه‌ی Δ هستند و گزینه‌ی (۳) صحیح است.

توجه: دقت کنید که هر چه یال‌های حذف شده در تعداد رئوس کم‌تری قرار بگیرند، تعداد رئوس درجه‌ی ماکزیمم بیش‌تر خواهد شد.

مثال ۲۶: در گرافی با $p=10$ و $q=25$، حداکثر چند رأس با درجه‌ی ۹ وجود دارد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۵

پاسخ : باید از گراف k_{10} که دارای ۴۵ یال است، ۲۰ یال را حذف کنیم. برای آن‌که تعداد رئوس درجه‌ی ۹ بیش‌تر شود، این ۲۰ یال را باید در تعداد رأس کم‌تری قرار دهیم. در واقع باید نزدیک‌ترین گراف کامل که به ۲۰ یال وجود دارد را بیابیم و داریم: $\frac{p'(p'-1)}{2} \geq 20$ که $\min(p') = 7$ است. بنابراین از ۷ رأس، ۲۰ یال را حذف می‌کنیم و به این ترتیب از ۳ رأس هیچ یالی حذف نمی‌شود و درجه‌ی آن‌ها ۹ باقی می‌ماند، بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

مکمل یک گراف

تعریف: گراف مکمل G را با G' یا $\overline{G}$ نمایش می‌دهیم و گرافی است که از حذف کردن یال‌های گراف G از گراف کامل هم‌مرتبه‌اش به‌وجود می‌آید. در واقع هر یالی که در G وجود دارد در G' رسم نمی‌شود و هر یالی که در G وجود ندارد در G' رسم می‌شود.

گراف G' یا $\overline{G}$ — گراف G

به زبان ریاضی: «دو گراف G و G' با p رأس مکمل هستند، هرگاه: $V(G)=V(G')$، $E(G)\cap E(G')=\varnothing$ و $E(G)\cup E(G')=k_p$.»

چند ویژگی از گراف مکمل

۱) $(G')'=G$

۲) $p_G = p_{G'}$

۳) اجتماع یال‌های هر گراف با یال‌های گراف مکملش برابر با گراف کامل هم‌مرتبه‌اش است.

$$q_G + q_{G'} = \frac{p(p-1)}{2} = \binom{p}{2}$$

۴) مجموع درجه‌ی هر رأس در گراف G و درجه‌ی همان رأس در گراف G'، برابر درجه‌ی رئوس گراف کامل هم‌مرتبه با G یعنی $p-1$ است.

$$\deg(v_G)+\deg(v_{G'})=p-1$$

۵) رأسی که در گراف G، ماکزیمم درجه را دارد، در گراف G' رأسی با مینیمم درجه است و بالعکس.

۶) $\Delta_G + \delta_{G'} = p-1$, $\delta_G + \Delta_{G'} = p-1$

مثال ۲۷: تعداد یال‌های گراف G با تعداد یال‌های گراف مکملش برابر شده است. مرتبه‌ی گراف کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

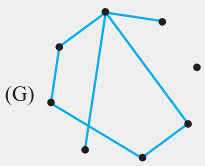
پاسخ: با توجه به این‌که $q_G = q_{G'}$ است و $q_G + q_{G'} = \frac{p(p-۱)}{۲}$، پس باید $\frac{p(p-۱)}{۲}$ عددی زوج باشد. گزینه‌ها را امتحان می‌کنیم:

$$p=۱۰ \Rightarrow \frac{۱۰\times ۹}{۲}=۴۵ \quad , \quad p=۱۱ \Rightarrow \frac{۱۱\times ۱۰}{۲}=۵۵$$

$$p=۱۳ \Rightarrow \frac{۱۳\times ۱۲}{۲}=۷۸ \quad , \quad p=۱۴ \Rightarrow \frac{۱۴\times ۱۳}{۲}=۹۱$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

مثال ۲۸: گراف G به‌صورت مقابل مفروض است. $\delta_{G'}$ کدام است؟



۱) ۵
۲) ۴
۳) ۳
۴) ۲

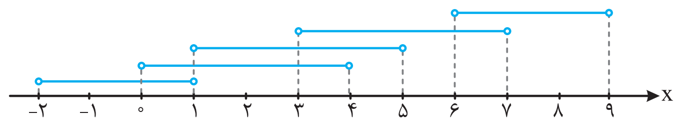
پاسخ:

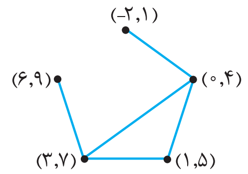
$$\Delta_G + \delta_{G'} = p-۱ \Rightarrow ۴+\delta_{G'} = ۸-۱ \Rightarrow \delta_{G'} = ۳$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

گراف بازه‌ها

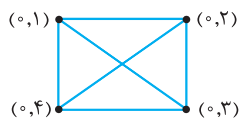
تعریف: گراف G، گراف بازه‌ای یا بازه‌ها است، اگر بتوانیم به رئوس آن بازه‌هایی باز از اعداد حقیقی را طوری نسبت دهیم که بازه‌ی مربوط به دو رأس مجاور، دارای اشتراک باشند و بازه‌ی دو رأس غیر مجاور، اشتراک نداشته باشند.





نکته: تمام گراف‌های کامل و گراف‌های تهی بازه‌ای هستند.

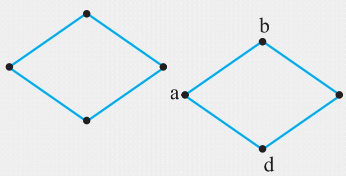
برای نمونه به گراف‌های $k_۴$ و $\overline{k_۴}$ توجه کنید که چگونه بازه‌بندی شده‌اند:

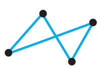
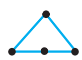
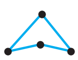


مثال ۲۹: ثابت کنید گراف مقابل گراف بازه‌ها نیست.

پاسخ:

با توجه به گراف مقابل، باید بازه‌ی رئوس b و d با بازه‌ی رأس a دارای اشتراک باشند ولی با هم اشتراک نداشته باشند. پس بازه‌های آن‌ها به‌صورت  می‌باشند. حالا باید بازه‌ی رأس c با بازه‌های رئوس b و d دارای اشتراک باشد ولی با بازه‌ی رأس a اشتراک نداشته باشد که چنین بازه‌ای وجود ندارد.



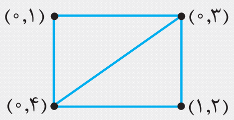
توجه: گراف‌های  ،  ،  و  هم با گراف مثال بالا معادلند و گراف بازه‌ای نیستند.

نکته: در حالت کلی هر n ضلعی $(n \geq ۴)$ بدون قطر، گراف بازه‌ای نیست. هر n ضلعی با یک قطر که $n \geq ۵$ باشد نیز گراف بازه‌ای نیست.

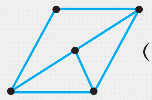
توجه: گرافی که شامل یک چهارضلعی بدون قطر باشد، گراف بازه‌ای نیست.

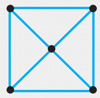
مثال ۳۰: آیا چهارضلعی با یک قطر، گراف بازه‌ای است؟

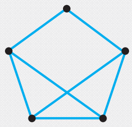
پاسخ : بله، بازه‌ای است. برای نمونه به گراف روبه‌رو توجه کنید:

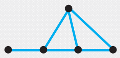


مثال ۳۱: کدام گزینه گراف بازه‌ای می‌باشد؟

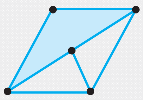
۱) 

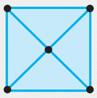
۲) 

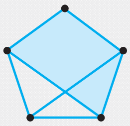
۳) 

۴) 

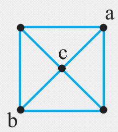
پاسخ : در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) می‌توان چهارضلعی بدون قطر را مشاهده کرد.



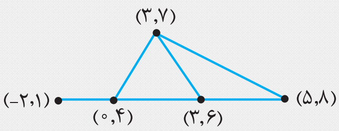




توجه کنید در گراف گزینه‌ی (۲) قطرها رسم نشده‌اند بلکه رئوس a و b به رأس c متصل شده است.

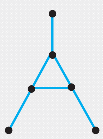


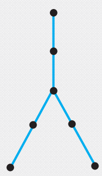
برای گزینه‌ی (۴) که صحیح است، می‌توان بازه‌های مناسب را نسبت داد:



توجه: عکس نکته‌ی قبل صحیح نمی‌باشد. یعنی اگر گرافی، گراف بازه‌ای نباشد دلیلی ندارد که شامل n ضلعی $(n \geq 4)$ بدون قطر باشد.

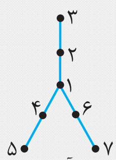
مثال ۳۲: ثابت کنید گراف‌های زیر بازه‌ای نیستند؟



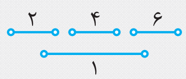


پاسخ : این دو گراف با این‌که n ضلعی بدون قطر $(n \geq 4)$ ندارند ولی بازه‌ای نیستند.

ابتدا رئوس و متناسب با آن بازه‌های مربوط به رئوس را نام‌گذاری می‌کنیم. بازه‌های (۲)، (۴) و (۶) (یعنی بازه‌های مربوط به رئوس (۲)، (۴) و (۶)) با بازه‌ی (۱) اشتراک دارند ولی با هم اشتراک ندارند پس می‌توان بازه‌های آن‌ها را به‌صورت نمودار (ب) نمایش داد (توجه کنید که از بازه‌های (۲)، (۴) و (۶) بالاخره یکی وسط قرار می‌گیرد و در نمودار ما بازه‌ی (۴) در وسط قرار گرفته است). بازه‌ی (۵) باید با بازه‌ی (۴) اشتراک داشته باشد و با بازه‌ی (۱) اشتراک نداشته باشد که چنین بازه‌ای وجود ندارد.

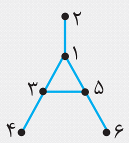


(آ)

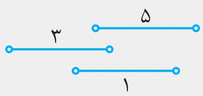


(ب)

در گراف شکل (پ) نیز بازه‌های (۱)، (۳) و (۵) دوبه‌دو با هم دارای اشتراکند و نمودار آن‌ها به‌صورت (ت) است. باز هم یک بازه در وسط قرار می‌گیرد که در اینجا بازه‌ی (۱) قرار گرفته است. بازه‌ی (۲) باید با بازه‌ی (۱) دارای اشتراک باشد و با بازه‌های (۳) و (۵) اشتراک نداشته باشد که چنین بازه‌ای وجود ندارد.



(پ)



(ت)

گراف مشاغل

در این نوع مسائل، افرادی برای تعدادی شغل داوطلب شده‌اند و باید شغل‌ها را بین آن‌ها تقسیم کرد.

در حل این نوع مسائل به چند نکته توجه کنید:

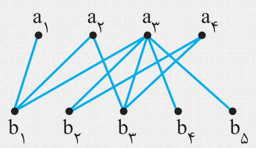
۱) این شغل‌ها تمام وقت هستند، پس هر نفر حداکثر یک شغل را می‌تواند داشته باشد.

۲) هر شغل برای یک نفر می‌باشد و نمی‌توان یک شغل را به چند نفر داد.

۳) هدف حل مسأله این است که تمامی شغل‌ها پر شوند.

۴) حل مسأله را از شغل‌هایی آغاز می‌کنیم که داوطلب کم‌تری دارند.

مثال ۳۳: **برای ۴ شغل تمام‌وقت a_1، a_2، a_3 و a_4، ۵ نفر b_1، b_2، b_3، b_4 و b_5 مطابق گراف مقابل داوطلب شده‌اند. به چند روش می‌توان این شغل‌ها را بین این افراد تقسیم کرد؟** (مثال ۳ کتاب درسی - صفحه‌ی ۴)



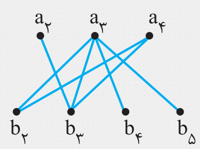
۱) نشدنی

۲) ۱

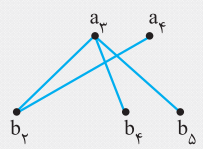
۳) ۲

۴) ۳

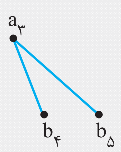
پاسخ: برای حل این مثال، شغل a_1 فقط یک داوطلب دارد، پس به فرد b_1 می‌رسد. حال می‌توان رئوس a_1 و b_1 را از مسأله حذف کرد.



در گراف باقی‌مانده برای شغل a_2 فقط فرد b_3 داوطلب شده است. پس شغل a_2 برای فرد b_3 است و آن‌ها را نیز حذف می‌کنیم.



در مرحله‌ی بعد برای شغل a_4 فقط فرد b_2 باقی‌مانده است و این شغل برای فرد b_2 است و داریم:

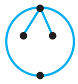
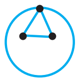
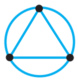
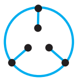


در پایان از بین دو فرد b_4 یا b_5 یکی شغل a_3 را می‌گیرد. پس در کل به ۲ حالت می‌توان شغل‌ها را بین این افراد تقسیم کرد. بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

توجه: **در بعضی از این نوع مسائل تمام افراد برای تمام شغل‌ها داوطلب شده‌اند که در واقع یک گراف مشاغل کامل می‌باشد و در بعضی مسائل مانند مثال فوق همه‌ی افراد برای همه‌ی مشاغل داوطلب نشده‌اند که یک گراف مشاغل ناقص داریم.**

۱ تست‌های جلسه اول

۱. کدام گراف زیر ساده است؟ (آزمون‌های گاج)

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

۲. در گراف ساده‌ی G با مجموعه رئوس $V = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ دو رأس مجاورند اگر و تنها اگر مجموع اعداد دو رأس بر ۳ بخش‌پذیر باشد. اندازه‌ی گراف کدام است؟ (آزمون‌های گاج)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۳. تعداد رأس‌ها و یال‌های گراف $G = (V,E)$ با $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ و $E = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_1v_5\}$ به ترتیب برابر:

۱) ۸ و ۵ است. ۲) ۵ و ۸ است. ۳) ۵ و ۴ است. ۴) ۵ و ۷ است.

۴. کدام‌یک از گزینه‌های زیر دنباله‌ی درجه‌ی رئوس یک گراف ساده است؟ (آزمون‌های گاج)

۱) ۵,۴,۳,۲,۱,۱,۱ ۲) ۵,۴,۳,۳,۳,۲,۱ ۳) ۶,۶,۵,۴,۳,۳,۱ ۴) ۷,۷,۷,۶,۶,۶,۵,۲

۵. اگر $۶,۶,۶,۵,۴,x,y$ دنباله‌ی درجه‌ی رئوس یک گراف ساده باشد، $x + y$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۹

۶. گراف ساده‌ای با اندازه‌ی $q = ۱۳$ حداقل چند رأس دارد؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۷ ۴) ۶

۷. در گرافی $p = ۲۰$ و $q = ۱۷$، حداکثر چند رأس درجه‌ی صفر می‌توانیم داشته باشیم؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

۸. گرافی با ۲۴ یال فقط رئوس با درجات ۴ و ۷ دارد. مرتبه‌ی گراف کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۰ ۳) ۸ ۴) ۹

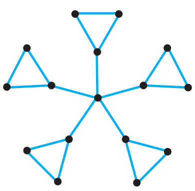
۹. در گرافی با اندازه‌ی ۱۲، مجموع درجه‌ی رئوس زوج برابر ۱۲ است. اگر رئوس فرد همگی هم‌درجه باشند، آن‌گاه تعداد آن‌ها کدام می‌تواند باشد؟ (آزمون‌های گاج)

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۱۲

۱۰. در گرافی از مرتبه‌ی ۸ و اندازه‌ی ۱۴، اگر $\delta = ۳$، $\Delta = ۵$ و دو رأس از درجه‌ی ۴ باشد، تعداد رئوس با درجه‌ی ۳ کدام است؟ (آزمون‌های گاج)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

۱۱. به گراف مقابل چند یال اضافه کنیم تا گراف کامل شود؟



۱) ۸۰
۲) ۹۰
۳) ۱۰۰
۴) ۱۲۰

۱۲. اگر تعداد یال‌های یک گراف r - منتظم، ۶۰ باشد، مرتبه‌ی آن کدام عدد می‌تواند باشد؟ (آزمون‌های گاج)

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۳. برای تبدیل یک گراف ۵ - منتظم از مرتبه‌ی p به گراف کامل از همان مرتبه، لازم است ۲۰ یال به آن گراف اضافه شود. p کدام است؟ (آزمون‌های گاج)

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۱۴. در گراف G از مرتبه‌ی ۱۳، دنباله‌ی درجه‌ی رئوس آن تشکیل دنباله‌ی هندسی داده است. اگر در این گراف $\delta = ۵$ باشد، مجموع درجه‌ی رئوس گراف کدام است؟

۱) ۶۵ ۲) ۱۳۰ ۳) ۲۶۰ ۴) چنین گرافی وجود ندارد.

۱۵. با برداشتن $\frac{1}{3}$ از یال‌های گراف کامل k_p، یک گراف ۶ - منتظم به‌دست می‌آید. این گراف .... است. (آزمون‌های گاج)

۱) ۷ - منتظم ۲) ۸ - منتظم ۳) ۹ - منتظم ۴) ۱۰ - منتظم

۱۶. G یک گراف ۳ - منتظم از مرتبه‌ی ۶ و H یک گراف ۲ - منتظم است. هر رأس گراف G را به تمام رئوس گراف H وصل می‌کنیم. اگر گراف حاصل منتظم باشد، مرتبه‌ی گراف H کدام است؟ (آزمون‌های گاج)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۷. در چه تعداد از گراف‌های ساده‌ی ساخته‌شده با رئوس a,b,c,d,e حداقل یکی از دو یال ab و ac وجود دارد؟ (آزمون‌های گاج)

۱) 2^8 ۲) 3×2^7 ۳) 3×2^8 ۴) $3^2\times 2^7$

۱۸. چند گراف ساده با مجموعه رئوس $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ قابل رسم است، به‌طوری که در آن رأس v_3 منفرد و دو رأس v_1 و v_2 مجاور باشند؟ (آزمون‌های گاج)

۱) ۱۰۲۴ ۲) ۶۴ ۳) ۶۳ ۴) ۳۲

۱۹. با رئوس a,b,c,d,e,f چند گراف با اندازه‌ی ۴ می‌توان تشکیل داد، به‌طوری که شامل یال bc بوده و در آن رأس a منفرد باشد؟ (آزمون‌های گاج)

۱) $\binom{10}{4}$ ۲) $\binom{10}{3}$ ۳) $\binom{9}{3}$ ۴) $\binom{9}{4}$

۲۰. با رئوس a,b,c,d,e چند گراف ساده می‌توان ساخت که در آن‌ها رأس a از درجه‌ی ۳ باشد؟ (آزمون‌های گاج)

۱) 2^{10} ۲) 2^8 ۳) 2^6 ۴) 3×2^6

۲۱. با رئوس a,b,c,d,e,f چند گراف ساده می‌توان ساخت که فقط شامل ۲ یال بوده و این دو یال در یک رأس مشترک نباشند؟ (آزمون‌های گاج)

۱) ۴۵ ۲) ۶۵ ۳) ۶۰ ۴) ۴۰

۲۲. گرافی با ۱۲ رأس، دارای دو رأس درجه‌ی ۵ و دو رأس درجه‌ی ۳ است. حداکثر تعداد یال‌های این گراف کدام است؟ (آزمون‌های گاج)

۱) ۵۰ ۲) ۴۴ ۳) ۶۰ ۴) ۴۲

۲۳. کدام گراف ساده‌ی زیر وجود دارد؟ (آزمون‌های گاج)

۱) گرافی با ۵ رأس که هر رأس آن با ۳ رأس دیگر مجاور است.
۲) گرافی با درجه‌ی رئوس ۵,۵,۳,۳,۱,۱,۰,۰
۳) گراف ۸ - منتظم با اندازه‌ی ۲۴
۴) گراف ۷ - منتظم با اندازه‌ی ۳۵

۲۴. تعداد یال‌های یک گراف، ۳ برابر تعداد یال‌های گراف مکمل آن است. مرتبه‌ی گراف، کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۷ ۳) ۱۵ ۴) ۱۴

۲۵. در یک گراف از مرتبه‌ی ۹، اندازه‌ی گراف ۱۱ است. اگر این گراف یک رأس از درجه‌ی $\delta=1$ و یک رأس از درجه‌ی $\Delta=4$ داشته باشد، تعداد رئوس فرد این گراف کدام است؟ (آزمون‌های گاج)

۱) ۸ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۲۶. گرافی از مرتبه‌ی ۹ و اندازه‌ی ۱۳ است. این گراف حداکثر چند رأس از درجه‌ی صفر دارد؟ (آزمون‌های گاج)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۷. در گرافی $p=20$ و $q=20$ است. حداکثر چند رأس با درجه‌ی یک می‌توانیم داشته باشیم؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۷

۲۸. در گرافی ساده از مرتبه‌ی ۸، مینیمم درجه‌ی رئوس، برابر ۳ است. حداکثر اندازه‌ی گراف چند است؟ (آزمون‌های گاج)

۱) ۲۲ ۲) ۲۳ ۳) ۲۴ ۴) ۲۵

۲۹. گراف G از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی ۱۲ است. حداکثر مقدار δ کدام می‌تواند باشد؟ (آزمون‌های گاج)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۲

۳۰. گرافی از مرتبه‌ی ۸ دارای ۲۵ یال است. این گراف حداکثر چند رأس با درجه‌ی ماکزیمم دارد؟ (آزمون‌های گاج)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۳۱. گرافی ۹ رأس و ۲۷ یال دارد. حداقل مقدار $\Delta-\delta$ کدام است؟ (آزمون‌های گاج)

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) صفر ۴) ۱

۳۲. در گراف ساده‌ی $G = (V,E)$ از مرتبه‌ی ۱۰ و اندازه‌ی ۴۰، حداکثر چند رأس می‌توانند ماکزیمم درجه را داشته باشند؟ (آزمون‌های گاج)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۱۰ ۴) ۵

۳۳. به گراف بازه‌های (۷,۱۰)، (۹,۱۱)، (۸,۱۰)، (۷,۹) و (۶,۸) چند یال اضافه کنیم تا همه‌ی رئوس با هم مجاور باشند؟ (آزمون‌های گاج)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۳۴. گرافی ساده با دنباله‌ی درجات رئوس ۳,۳,۳,۱,۱,۱ به چند طریق متناظر با بازه‌ها است؟ (آزمون‌های گاج)

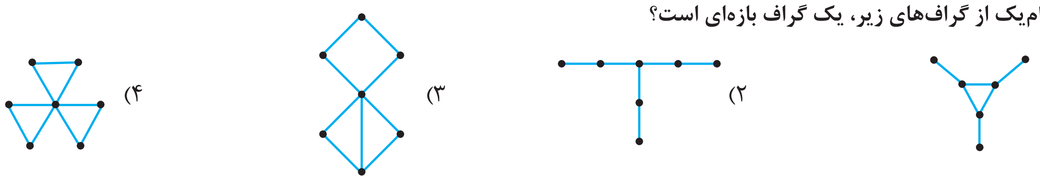
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بی‌شمار ۴) نشدنی

۳۵. کدام گزینه گراف بازه‌ای نیست؟

۱) ۲) ۳) ۴)

۳۶. کدام‌یک از گراف‌های زیر، یک گراف بازه‌ای است؟ (آزمون‌های گاج)

۱) ۲) ۳) ۴)



۳۷. در گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی ۱۱، سه رأس از درجات ۷، ۳ و ۵ وجود دارد. حداکثر اندازه‌ی گراف G کدام است؟ (آزمون‌های گاج)

۱) ۴۵ ۲) ۴۲ ۳) ۴۳ ۴) ۴۴

۳۸. گرافی فقط رأس‌هایی از درجه‌ی ۲ و ۸ دارد. اختلاف مرتبه و اندازه‌ی این گراف کدام‌یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟ (آزمون‌های گاج)

۱) ۴۴ ۲) ۳۸ ۳) ۴۰ ۴) ۴۲

۳۹. در گرافی از مرتبه‌ی ۷، $\Delta = ۶$ و $\delta = ۲$ است. حداکثر اندازه‌ی این گراف کدام است؟ (آزمون‌های گاج)

۱) ۱۶ ۲) ۱۷ ۳) ۱۸ ۴) ۱۹

۴۰. در گرافی $p = ۱۰$ و دارای دو رأس درجه‌ی ۵ است. این گراف حداکثر و حداقل چند یال دارد؟

۱) ۳۸ و ۹ ۲) ۳۷ و ۹ ۳) ۳۸ و ۱۰ ۴) ۳۷ و ۱۰

۴۱. اگر در یک گراف $q = ۶p + ۲$ باشد، حداقل اندازه‌ی گراف کدام است؟

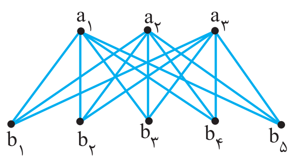
۱) ۸۲ ۲) ۸۴ ۳) ۸۸ ۴) ۸۶

۴۲. در گراف ساده‌ای با اندازه‌ی ۱۰، $\delta = ۲$ است. این گراف حداقل چند رأس دارد؟ (آزمون‌های گاج)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۱۰

۴۳. برای ۳ شغل تمام‌وقت $a_{۱}$، $a_{۲}$ و $a_{۳}$، ۵ نفر $b_{۱}$، $b_{۲}$، $b_{۳}$، $b_{۴}$ و $b_{۵}$ مطابق گراف مقابل داوطلب شده‌اند. به چند روش شغل‌ها را بین افراد می‌توان تقسیم کرد؟

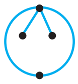
۱) ۶۰
۲) ۱۲۰
۳) ۴۵
۴) ۳۰



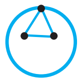
۱ پاسخ تست‌های جلسه‌اول

۱
۱ ۲ ۳ **۴**

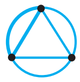
گزینه‌ی (۱) دارای یال موازی است.



گزینه‌ی (۲) دارای طوقه است.

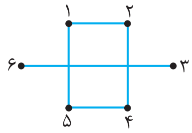


گزینه‌ی (۳) دارای یال موازی است.



۲
۱ **۲** ۳ ۴

هر دو عددی را که مجموع آن‌ها مضرب ۳ است، به هم وصل می‌کنیم و گراف مقابل به‌دست می‌آید:



۳
۱ ۲ **۳** ۴

تعداد اعضای مجموعه‌ی V برابر با تعداد رئوس (مرتبه) و تعداد اعضای مجموعه‌ی E برابر با تعداد یال‌های (اندازه‌ی) گراف است.

۴
۱ **۲** ۳ ۴

گزینه‌ی (۳) نادرست است، چون دارای ۷ رأس است و ۲ رأس درجه‌ی ۶ (فول) دارد، پس درجه‌ی باقی رئوس باید حداقل ۲ باشد.

گزینه‌ی (۴) نادرست است، چون دارای ۸ رأس است و ۳ رأس درجه‌ی ۷ (فول) دارد، پس درجه‌ی باقی رئوس باید حداقل ۳ باشد.

برای گزینه‌های (۱) و (۲) نیز می‌توانیم از روش هاول- حکیمی استفاده کنیم.

گزینه‌ی (۲): $۱,۲,۳,۳,۴,\cancel{۵}$
$۰,۱,۲,۲,\cancel{۳}$
$۰,۰,۱,\cancel{۱}$
$۰,۰,۰$

دنباله‌ی درجه‌ی رئوس یک گراف ساده است.

گزینه‌ی (۱): $۱,۱,۲,۳,۴,\cancel{۵}$
$۰,۰,۱,۲,\cancel{۳}$
$۰,-۱,۰,۱$

دنباله‌ی درجه‌ی رئوس یک گراف ساده نیست.

۵
۱ ۲ **۳** ۴

گراف دارای ۷ رأس است و ۳ رأس از درجه‌ی ۶ (فول) دارد. پس $x,y\geq ۳$ و با توجه به نزولی بودن دنباله داریم $x,y\leq ۴$ و تعداد رئوس فرد در گراف باید عددی زوج باشد. پس $y=۳$ و $x=۴$ و داریم $x+y=۷$

۶
۱ ۲ ۳ **۴**

$$q=۱۳\leq \frac{p(p-۱)}{۲}\Rightarrow \min(p)=۶$$

۷
۱ ۲ ۳ ۴

برای حداکثر شدن تعداد رئوس درجه‌ی صفر باید ۱۷ یال در تعداد رأس کم‌تری قرار بگیرند و با توجه به نامساوی $q=۱۷\leq \frac{p'(p'-۱)}{۲}$، حداقل مقدار p'، برابر ۷ است. پس در ۷ رأس ۱۷ یال را رسم می‌کنیم و در نتیجه $۲۰-۷=۱۳$ رأس منفرد خواهیم داشت.

۸
۱ ۲ ۳ **۴**

اگر x تا رأس از درجه‌ی ۴ و y تا رأس از درجه‌ی ۷ باشد داریم $\sum deg(a_i)=۴x+۷y=۴۸$ یک جواب معادله $y=۰$ و $x=۱۲$ و یک جواب دیگر $y=۴$ و $x=۵$ است و در اعداد حسابی جواب دیگری ندارد. با توجه به گزینه‌ها گزینه‌ی (۴) صحیح است.

۹
۱ ۲ ۳ **۴**

$$\sum deg(a_i)=۲q$$

$\Rightarrow$ (مجموع درجه‌ی رئوس فرد) + (مجموع درجه‌ی رئوس زوج) $=۲۴$

اگر تعداد x رأس با درجه‌ی فرد r داشته باشیم، آن‌گاه:

$$xr+۱۲=۲۴\Rightarrow xr=۱۲$$

با توجه به این‌که r عددی فرد است پس r می‌تواند اعداد ۱ یا ۳ باشد و x می‌تواند ۱۲ یا ۴ باشد که ۱۲ در گزینه‌ها وجود دارد.

۱۰
۱ ۲ ۳ **۴**

فرض کنیم x رأس از درجه‌ی ۳ و y رأس از درجه‌ی ۵ باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{cases}x+y+۲=۸\\ ۳x+۵y+۸=۲۸\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}x+y=۶\\ ۳x+۵y=۲۰\end{cases}\Rightarrow x=۵, y=۱$$

۱۱
۱ ۲ **۳** ۴

این گراف از مرتبه‌ی ۱۶ است و دارای ۲۰ یال است و گراف $k_{۱۶}$ دارای $\frac{\cancel{۱۶}^{\,۸}\times ۱۵}{۲}=۱۲۰$ یال است، پس $۱۲۰-۲۰=۱۰۰$ یال باید اضافه شود.

۱۲
۱ **۲** ۳ ۴

$$q=\frac{rp}{۲}\Rightarrow rp=۱۲۰\ ,\ r<p$$

با توجه به شرط $r<p$، می‌توان $p=۱۲$ را قابل قبول دانست.

۱۳
۱ **۲** ۳ ۴

$\frac{۵p}{۲}=$ تعداد یال‌های گراف ۵- منتظم

$$\frac{۵p}{۲}+۲۰=\frac{p(p-۱)}{۲}$$

$$\Rightarrow ۵p+۴۰=p^۲-p\Rightarrow p^۲-۶p-۴۰=۰$$

$(p-۱۰)(p+۴)=۰\Rightarrow p=۱۰$ یا $p=-۴$ غ ق ق

۱۴
۱ ۲ ۳ **۴**

اگر در گرافی دنباله‌ی درجه‌ی رئوس تشکیل دنباله‌ی حسابی یا هندسی دهد باید تمام رئوس هم‌درجه باشند و با توجه به این‌که $\delta=۵$ است، باید یک گراف ۱۳ رأسی ۵- منتظم داشته باشیم که چنین گرافی وجود ندارد.

۱۵
۱ ۲ **۳** ۴

اگر $\frac{۱}{۳}$ یال‌های گراف k_p حذف شوند، پس $\frac{۲}{۳}$ یال‌ها باقی می‌ماند.

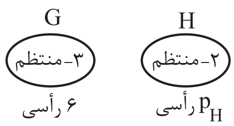
$$\frac{۲}{۳}\times \frac{p(p-۱)}{۲}=\frac{p\times ۶}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{p^۲-p}{۳}=۳p\Rightarrow p^۲-p=۹p\Rightarrow p^۲=۱۰p\Rightarrow p=۱۰$$

گراف $k_{۱۰}$ یک گراف ۹- منتظم است.

۱۶
۱ ۲ ۳ ۴

بعد از این‌که تمام رئوس گراف‌های G و H را به هم وصل کنیم، درجه‌ی هر رأس در گراف G برابر $۳+p_H$ می‌شود و درجه‌ی هر رأس از گراف H برابر با $۲+۶$ است. پس:



$$۳+p_H=۲+۶\Rightarrow p_H=۵$$

۱۷
۱ ۲ **۳** ۴

طبق فرض سؤال یال‌های ab و ac روی هم دارای ۳ حالتند: یا هر دو در گراف هستند، یا این‌که فقط یال ab یا فقط یال ac در گراف باشد. ۸ یال دیگری که می‌توان با این ۵ رأس ساخت هر کدام دارای ۲ حالتند. پس در کل ۳×۲^۸ گراف می‌توان ساخت.

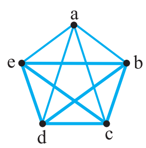
۱۸ ۱ ۲ ۳ **۴**

رأس $v_۳$ منفرد است و با ۴ رأس دیگر می‌توان $\binom{۴}{۲}=۶$ یال ساخت که چون یال $v_۱v_۲$ وجود دارد، ۵ یال دیگر هر کدام در گراف هستند یا نیستند، پس در کل $۲^۵=۳۲$ گراف وجود دارد.

۱۹ ۱ ۲ **۳** ۴

رأس a منفرد است، پس آن را کنار می‌گذاریم. باید با ۵ رأس باقی‌مانده، که حداکثر $\frac{۵\times۴}{۲}=۱۰$ یال می‌توان رسم کرد، یک گراف با ۴ یال ساخت که چون یال bc انتخاب شده باید ۳ یال از بین ۹ یال باقی‌مانده انتخاب کرد. جواب برابر است با: $\binom{۹}{۳}$

۲۰ ۱ **۲** ۳ ۴

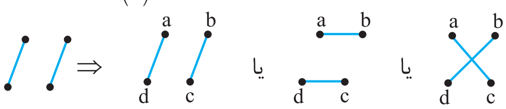


از ۴ یال متصل به رأس a باید ۳ یال را انتخاب کرد و ۶ یال دیگر که به رأس a متصل نیستند، هر کدام دارای ۲ حالت هستند.

$$\binom{۴}{۳}\times۲^۶=۴\times۲^۶=۲^۸$$

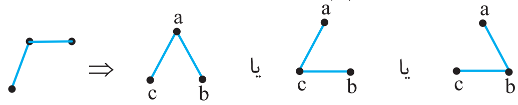
۲۱ **۱** ۲ ۳ ۴

نمودار این گراف به‌صورت زیر است که از ۴ رأس تشکیل شده است. پس باید ۴ رأس را انتخاب کرد و با این ۴ رأس به ۳ مدل می‌توان ۲ یال جدا از هم را انتخاب کرد. پس جواب برابر است با: $\binom{۶}{۴}\times۳=۴۵$.



سؤال: اگر در این تست بیان می‌شد که دو یال در یک رأس مشترک باشند جواب چیست؟

جواب: نمودار گراف به‌صورت زیر است که از ۳ رأس تشکیل شده است و باید ۳ رأس را انتخاب کرد و به ۳ مدل می‌توان گراف را نام‌گذاری کرد و جواب برابر است با $\binom{۶}{۳}\times۳=۶۰$



۲۲ ۱ **۲** ۳ ۴

فرض کنیم که دو رأس درجه‌ی ۵ و دو رأس درجه‌ی ۳ وجود ندارند. با ۸ رأس باقی‌مانده، گرافی با حداکثر تعداد یال (گراف $k_۸$) می‌سازیم. سپس دو رأس درجه‌ی ۵ و دو رأس درجه‌ی ۳ را اضافه می‌کنیم.

$$q_{max}=\frac{۸\times۷}{۲}+۵+۵+۳+۳=۴۴$$

توجه کنید که در اضافه کردن دو رأس درجه‌ی ۵ و دو رأس درجه‌ی ۳ برای ماکزیمم شدن یال‌ها نباید بین خود این رئوس یال‌ها را رسم کرد و آن‌ها را به ۸ رأس دیگر متصل می‌کنیم.

۲۳ ۱ ۲ ۳ **۴**

گزینه‌ی (۱) نادرست است، چون گراف ۵ رأسی ۳ - منتظم وجود ندارد.

گزینه‌ی (۲) نادرست است، چون اگر درجه‌های صفر را در نظر نگیریم، ۶ رأس داریم که دو تا از آن‌ها درجه‌ی ۵ است، پس درجه‌ی باقی رئوس باید حداقل ۲ باشد.

گزینه‌ی (۳) نادرست است، چون اگر $r=۸$ باشد و $q=۲۴$، در این صورت $p=۶$ است که نمی‌توان با ۶ رأس، رأس با درجه‌ی ۸ ساخت.

گزینه‌ی (۴) دارای ۱۰ رأس است و چنین گرافی وجود دارد.

۲۴ ۱ **۲** ۳ ۴

$$\begin{cases}q_G=۳q_{G'}\\ q_G+q_{G'}=\frac{p(p-۱)}{۲}\end{cases}\Rightarrow ۴q_{G'}=\frac{p(p-۱)}{۲}$$

$$\Rightarrow p(p-۱)=۸q_{G'}$$

که با توجه به گزینه‌ها اگر $p=۱۷$ باشد، حاصل $p(p-۱)$ مضرب ۸ است.

۲۵ ۱ ۲ **۳** ۴

با توجه به این‌که $\delta=۱$ و $\Delta=۴$ است درجه‌ی باقی رئوس ۲ یا ۳ است. اگر x رأس از درجه‌ی ۲ باشد، این گراف به تعداد $۹-۱-۱-x=۷-x$ رأس درجه‌ی ۳ دارد.

$$\sum_{i=۱}^{۹}\deg(a_i)=۲q\Rightarrow ۱\times۱+x\times۲+(۷-x)\times۳+۱\times۴=۲۲$$

$$\Rightarrow ۱+۲x+۲۱-۳x+۴=۲۲\Rightarrow x=۴$$

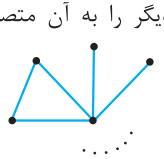
پس این گراف، ۳ رأس درجه‌ی ۳ و یک رأس درجه‌ی ۱ دارد.

۲۶ **۱** ۲ ۳ ۴

باید تا می‌توانیم این ۱۳ یال را در تعداد رأس کم‌تری قرار دهیم. از نامساوی $۱۳\le\frac{p'(p'-۱)}{۲}$ حداقل مقدار p' برابر با ۶ است. پس حداکثر $۹-۶=۳$ رأس درجه‌ی صفر داریم.

۲۷ ۱ ۲ ۳ **۴**

یک رأس را در مرکز قرار می‌دهیم و ۱۹ رأس دیگر را به آن متصل می‌کنیم. در این صورت ۱۹ یال داریم و باید دو رأس درجه‌ی یک را به هم متصل کنیم. پس حداکثر ۱۷ رأس درجه‌ی یک خواهیم داشت.



۲۸ ۱ ۲ **۳** ۴

درجه‌ی هر رأس گراف $k_۸$ برابر ۷ است. برای آن‌که $\delta=۳$ شود، باید از یک رأس ۴ یال را حذف کنیم، بنابراین: $q_{max}=\frac{۸\times۷}{۲}-۴=۲۴$

۲۹ ۱ **۲** ۳ ۴

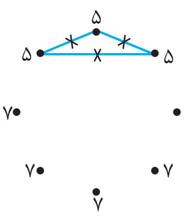
$$q=۱۲\le\frac{p(p-۱)}{۲}\Rightarrow p\ge۶$$

$$\delta\le\frac{۲q}{p}=\frac{۲۴}{p}\Rightarrow p\delta\le۲۴$$

با توجه به این‌که $p\ge۶$ پس حداکثر مقدار برای δ، برابر با ۴ است و گراف یک ۶ رأسی ۴ - منتظم می‌باشد.

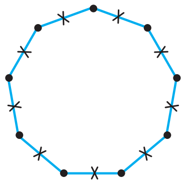
۳۰ ۱ **۲** ۳ ۴

گراف $k_۸$ دارای ۲۸ یال است و ما باید ۳ یال را حذف کنیم و بهترین حالت این است که ۳ یال را به‌صورت مثلثی حذف کنیم تا ۵ رأس دیگر همگی از درجه‌ی $\Delta=۷$ شوند.



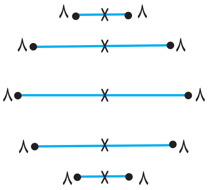
۳۱ ۱ ۲ **۳** ۴

گراف $k_۹$ دارای ۳۶ یال است و گراف ما، ۹ یال کم‌تر از آن دارد. برای آن‌که Δ و δ به هم نزدیک‌تر شوند باید یال‌ها را طوری حذف کنیم که از همه‌ی رئوس تقریباً به تعداد مساوی یال حذف شود. در این تست از هر رأس ۲ یال را حذف می‌کنیم. در واقع یک گراف ۹ رأسی ۶ - منتظم به‌وجود می‌آوریم و در این صورت $\Delta-\delta=۰$ است.



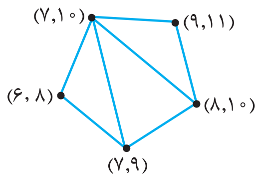
۳۲ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

توجه کنید در این سؤال بیان نشده که ماکزیمم درجه چند باشد. می‌دانیم گراف $k_{۱۰}$ دارای ۴۵ یال است و باید ۵ یال را حذف کنیم. خوب ۵ یال جدا از هم را حذف می‌کنیم، به این ترتیب از هر رأس یک یال حذف می‌شود و درجه‌ی تمام رئوس ۸ است.



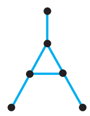
۳۳ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

گراف متناظر با بازه‌های داده‌شده را رسم می‌کنیم. این گراف دارای ۷ یال است و برای آن‌که گراف کامل شود (همه‌ی رئوس مجاور شوند) نیاز به ۳ یال دارد.



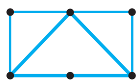
۳۴ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

گراف متناظر با این دنباله به‌صورت زیر است که در درسنامه ثابت کردیم بازه‌ای نیست. توجه کنید که اگر گرافی بازه‌ای باشد، به بی‌شمار مدل می‌توان به آن بازه نسبت داد.

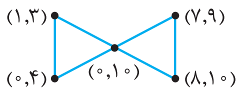


۳۵ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

در گراف گزینه‌ی (۴) می‌توان ۴ ضلعی بدون قطر (حفره) مشاهده کرد.

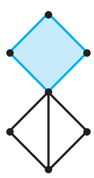


برای گزینه‌های دیگر با کمی تمرین می‌توانید بازه‌های مناسب پیدا کنید. برای نمونه به گزینه‌ی (۱) توجه کنید.



۳۶ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

گزینه‌های (۱) و (۲) نادرستند و در درسنامه بررسی کردیم. در گزینه‌ی (۳) هم چهارضلعی بدون قطر وجود دارد.



۳۷ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

به جز این ۳ رأس، ۸ رأس دیگر وجود دارد که بزرگ‌ترین گراف ممکن یعنی گراف $k_۸$ را با آن‌ها می‌سازیم. سپس این ۳ رأس را به آن‌ها می‌افزاییم.

$$q_{max} = \binom{۸}{۲} + ۷ + ۵ + ۳ = ۲۸ + ۷ + ۵ + ۳ = ۴۳$$

۳۸ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

اگر مرتبه‌ی گراف p و x رأس از درجه‌ی ۸ داشته باشد بنابراین $p-x$ رأس از درجه‌ی ۲ دارد.

$$\sum \deg(a_i) = ۲q$$

$$x \times ۸ + (p-x) \times ۲ = ۲q \Rightarrow ۸x + ۲p - ۲x = ۲q$$

$$۶x = ۲q - ۲p \Rightarrow ۳x = q - p$$

$q-p$ برابر با $۳x$ است که قطعاً مضرب ۳ است و در گزینه‌ها تنها عدد ۴۲ مضرب ۳ می‌باشد.

۳۹ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

روش اول: گراف $k_۷$ دارای ۲۱ یال است و درجه‌ی تمام رئوس ۶ است. برای آن‌که یک رأس از درجه‌ی $۲ = \delta$ شود باید ۴ یال را از یک رأس حذف کنیم، پس $q_{max} = ۲۱ - ۴ = ۱۷$.

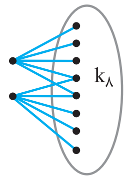
روش دوم: برای آن‌که q، ماکزیمم شود باید تعداد رئوس درجه‌ی ۶ را زیادتر کنیم. اما توجه کنید که با توجه به $\delta = ۲$ حداکثر می‌توانیم ۲ رأس درجه‌ی ۶ داشته باشیم و دنباله‌ی ماکزیمم به‌صورت ۶,۶,۵,۵,۵,۵,۲ است و بنابراین:

$$q_{max} = \frac{۶+۶+۵+۵+۵+۵+۲}{۲} = ۱۷$$

بررسی کنید آیا با دنباله‌ی فوق می‌توان گراف رسم کرد؟

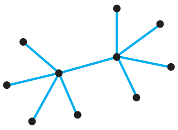
۴۰ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

برای حداکثر شدن تعداد یال‌ها دو رأس از درجه‌ی ۵ داریم و با ۸ رأس دیگر حداکثر تعداد یال یعنی گراف $k_۸$ را می‌سازیم، پس:



$$q_{max} = ۵ + ۵ + \binom{۸}{۲} = ۳۸$$

برای حداقل شدن تعداد یال‌ها هم بهتر است دو رأس درجه‌ی ۵ به هم متصل شوند، مانند گراف زیر:



$$q_{min} = ۹$$

۴۱ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

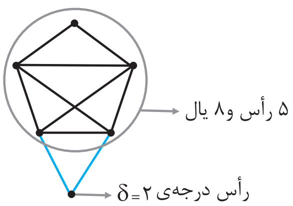
$$q = ۶p + ۲ \le \frac{p(p-۱)}{۲} \Rightarrow ۱۲p + ۴ \le p^۲ - p \Rightarrow ۰ \le p^۲ - ۱۳p - ۴$$

$$p = \frac{۱۳ \pm \sqrt{۱۶۹+۱۶}}{۲} \Rightarrow p > ۱۳$$

$$\min(p) = ۱۴ \Rightarrow \min(q) = ۶ \times ۱۴ + ۲ = ۸۶$$

۴۲ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

این گراف حداقل یک رأس درجه‌ی ۲ دارد و باید ۸ یال دیگر را در حداقل تعداد رئوس قرار بدهیم. بنابراین داریم $۸ \le \frac{p'(p'-۱)}{۲}$ و خواهیم داشت: $\min(p') = ۵$، پس حداقل ۶ رأس لازم است که باید در ۵ رأس، ۸ یال را قرار داد و یک رأس هم از درجه‌ی ۲ به آن افزود. برای نمونه به گراف زیر توجه کنید.



۴۳ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

تمام افراد برای تمام شغل‌ها داوطلب شده‌اند. پس کافی است ۳ نفر را انتخاب کنیم و ۳ شغل را بین آن‌ها تقسیم کنیم. بنابراین جواب برابر است با: $\binom{۵}{۳} \times ۳! = ۶۰$