



مجموع جملات دنباله‌ی حسابی

درستنامه‌ی ()

یادآوری دنباله‌ی حسابی (عددی)

دنباله‌ی حسابی (عددی) دنباله‌ای از اعداد است که هر جمله‌ی آن (غیر از جمله‌ی اول)، از افزودن یک مقدار ثابت به جمله‌ی قبل از خود به دست می‌آید. به این مقدار ثابت قدرنسبت گفته و آن را با d نمایش می‌دهند. در دنباله‌ی حسابی $\{a_n\}$:

(۱) جمله‌ی اول است.

(۲) اگر قدرنسبت d باشد، $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1}$ است.

(۳) جمله‌ی n ام با داشتن جمله‌ی اول (a_1) و قدرنسبت (d) ، از رابطه‌ی $a_n = a_1 + (n-1)d$ به دست می‌آید.

(۴) جمله‌ی n ام با داشتن جمله‌ی m ام (a_m) و قدرنسبت (d) ، از رابطه‌ی $a_n = a_m + (n-m)d$ به دست می‌آید.

(۵) اگر a_p و a_q دو جمله‌ی متفاوت از این دنباله باشند، $d = \frac{a_p - a_q}{p - q}$ است.

(۶) بین جملات دنباله‌ی حسابی رابطه‌ی خطی حاکم است. به طور کلی هر نمایش به فرم $a_n = \alpha n + \beta$ ($n \in \mathbb{N}$)، نمایش یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت α است. برای یافتن هر جمله کافی است به جای n ، شماره‌ی جمله را قرار دهیم.

(۷) اگر a جمله‌ی اول و b جمله‌ی آخر یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت d باشد، تعداد جملات از رابطه‌ی $n = \frac{b-a}{d} + 1$ به دست می‌آید.

(۸) هر گاه بخواهیم بین دو عدد a و b ، تعداد m عدد را طوری قرار دهیم که دنباله‌ی اعداد حاصل، تشکیل یک دنباله‌ی حسابی دهند، قدرنسبت این دنباله از رابطه‌ی $d = \frac{b-a}{m+1}$ به دست می‌آید.

(۹) اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت‌های d_1 و d_2 باشند، جملات مشترک دو دنباله در صورت وجود، دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت d می‌سازد که در آن d ، کوچک‌ترین مضرب مشترک d_1 و d_2 است.

(۱۰) در دنباله‌ی حسابی $\{a_n\}$ ، برای هر p, q, n, m و l طبیعی که در رابطه‌ی $p+q = n+m = 2l$ صدق کنند، داریم:

$$n+m = p+q = 2l \Rightarrow a_n + a_m = a_p + a_q = 2a_l$$

مجموع جملات دنباله‌ی حسابی

در دنباله‌ی حسابی $\{a_n\}$ ، مجموع n جمله‌ی اول را با نماد S_n نمایش می‌دهند و تعریف می‌شود:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = S_n$$

اگر a_1 جمله‌ی اول، a_n جمله‌ی n ام و d قدرنسبت دنباله‌ی حسابی باشد، مجموع n جمله‌ی اول از رابطه‌های زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad \text{یا} \quad S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

مثال: در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی هفتم برابر ۳ و جمله‌ی دهم برابر ۹ است. مجموع ۲۰ جمله‌ی اول را بیابید.

پاسخ: ✓

$$\left. \begin{array}{l} a_7 = 3 \Rightarrow d = \frac{a_{10} - a_7}{10 - 7} = \frac{9 - 3}{3} = 2 \quad (*) \\ a_{10} = 9 \\ a_7 = a_1 + (7-1)d \xrightarrow{(*)} a_1 = a_7 - 6 \times 2 \Rightarrow a_1 = 3 - 12 = -9 \end{array} \right\} \Rightarrow S_{20} = \frac{20}{2}[2 \times (-9) + (20-1) \times 2] = 200$$

نکته ۱: اگر تعداد جملات یک دنباله‌ی حسابی فرد باشد، داریم:

$$S_n = n \times (\text{جمله‌ی وسط}) \quad \text{یا} \quad S_{2n-1} = (2n-1) \times a_n$$

مثال: اگر $a_n = 3n + 1$ باشد، مجموع ۱۵ جمله‌ی اول چه قدر است؟

پاسخ: ✓

$$\left. \begin{array}{l} S_{15} = S_{2 \times 8 - 1} = 15 \times a_8 \\ a_n = 3n + 1 \Rightarrow a_8 = 3 \times 8 + 1 = 25 \end{array} \right\} \Rightarrow S_{15} = 15 \times 25 = 375$$

نکته ۲: مجموع n عدد طبیعی متوالی با شروع از یک، برابر است با $\frac{n(n+1)}{2}$. به عبارت دیگر:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

نکته ۳: مجموع n عدد طبیعی زوج متوالی با شروع از ۲، برابر است با $n(n+1)$. به عبارت دیگر:

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$$

نکته ۴: مجموع n عدد طبیعی فرد متوالی با شروع از یک برابر است با n^2 . به عبارت دیگر:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

نکته ۵: مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی به صورت $S_n = \alpha n^2 + \beta n$ است. برای یافتن جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی از طریق S_n کافی است S_1 و S_2 را به دست آوریم. داریم:

$$\begin{cases} S_1 = a_1 & (*) \\ S_2 = a_1 + a_2 \end{cases} \Rightarrow S_2 - S_1 = a_2 \xrightarrow{(*)} d = a_2 - a_1 = S_2 - 2S_1 \quad (**)$$

با داشتن d و a_1 ، دنباله‌ی حسابی مشخص می‌شود.

نکته ۶: روش دیگر برای یافتن جمله‌ی عمومی از روی S_n ، استفاده از رابطه‌ی $a_n = S_n - S_{n-1}$ است.

نکته ۷: حالت کلی نکته‌ی قبل را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_{m-1}}_{S_{m-1}} + a_m + a_{m+1} + \dots + a_n \Rightarrow a_m + a_{m+1} + \dots + a_n = S_n - S_{m-1}$$

یعنی مجموع جملات m تا n یک دنباله‌ی حسابی ($m < n$)، از رابطه‌ی $S_n - S_{m-1}$ به دست می‌آید.

مثال: اگر $S_n = 2n^2 - 4n$ باشد، مجموع جملات هفتم تا دهم و جمله‌ی عمومی دنباله را تعیین کنید.

پاسخ: ✓

$$\left. \begin{aligned} a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} &= S_{10} - S_{6} = S_{10} - S_6 \\ S_n &= 2n^2 - 4n \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{10} - S_6 = (2(10)^2 - 4 \times 10) - (2 \times (6)^2 - (4 \times 6)) = 112$$

برای یافتن جمله‌ی عمومی می‌توان یکی از نکات (۵) یا (۶) را به کار برد. مثلاً با نکته‌ی (۶) داریم:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 2n^2 - 4n - (2(n-1)^2 - 4(n-1)) \Rightarrow a_n = 4n - 6$$

نکته ۸: در دنباله‌ی حسابی $\{a_n\}$ ، اگر به جمله‌ی اول a' و به قدرنسبت d' واحد اضافه شود، تغییرات مجموع n جمله‌ی اول، از رابطه‌ی

$$\Delta S_n = \frac{n}{2} [2a' + (n-1)d']$$

۱- اعداد $\dots, \frac{5}{4}, y, x, 1, 0$ ، چهار جمله‌ی اول از یک دنباله‌ی حسابی اند. مجموع پانزده جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۶)

$$68 \quad (4) \qquad 67/5 \quad (3) \qquad 62/5 \quad (2) \qquad 57 \quad (1)$$

۲- اگر مجموع هشت جمله‌ی اول از دنباله‌ی حسابی با جملات $a_1 = 1 + 2p$ و $a_p = p - 1$ برابر ۶۰ باشد ($S_8 = 60$)، قدرنسبت دنباله چه قدر است؟ (آزاد ریاضی خارج از کشور ۸۸)

$$-7 \quad (4) \qquad -9 \quad (3) \qquad 7 \quad (2) \qquad 9 \quad (1)$$

۳- در یک دنباله‌ی حسابی جملات دوم و هشتم قرینه‌اند ($a_7 + a_2 = 0$) و جمله‌ی هفتم برابر چهار است ($a_7 = 4$). مجموع هشت جمله‌ی اول چه قدر است؟ (آزاد ریاضی ۸۲)

$$-8 \quad (4) \qquad 4 \quad (3) \qquad \text{صفر} \quad (2) \qquad 18 \quad (1)$$

۴- در یک دنباله‌ی حسابی مجموع بیست جمله‌ی اول سه برابر مجموع دوازده جمله‌ی اول آن است. اگر جمله‌ی سوم برابر ۶ باشد، جمله‌ی دهم کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۰)

$$38 \quad (4) \qquad 34 \quad (3) \qquad 36 \quad (2) \qquad 32 \quad (1)$$

۵- مجموع هشت جمله‌ی اول از دنباله‌ی حسابی برابر ۲ و جمله‌ی یازدهم آن برابر ۱۰ می‌باشد. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

$$\frac{3}{4} \quad (4) \qquad \frac{3}{2} \quad (3) \qquad \frac{2}{3} \quad (2) \qquad \frac{1}{2} \quad (1)$$

۶- در یک دنباله‌ی حسابی جمله‌ی پنجم برابر ۳ و هر جمله از جمله‌ی ماقبل خود به اندازه‌ی $\frac{1}{3}$ کم‌تر است. مجموع ۱۰ جمله‌ی اول آن کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۲)

$$30 \quad (4) \qquad 27/5 \quad (3) \qquad 25 \quad (2) \qquad 32/5 \quad (1)$$

۷- در یک دنباله‌ی حسابی، $a_7 = 9 - 2\sqrt{2}$ و $a_{14} = \sqrt{8} - 5$ است. مجموع ۲۰ جمله‌ی اول کدام است؟

$$40 + 40\sqrt{2} \quad (4) \qquad 20 + 20\sqrt{2} \quad (3) \qquad 40\sqrt{2} \quad (2) \qquad 40 \quad (1)$$

۸- در یک دنباله‌ی حسابی ده جمله‌ای، مجموع تمام جملات ۲۴۵ و تفاضل جمله‌ی اول از جمله‌ی آخر برابر ۴۵ است. جمله‌ی اول دنباله کدام است؟

$$37 \quad (4) \qquad 17 \quad (3) \qquad 12 \quad (2) \qquad 2 \quad (1)$$



۹- بین دو عدد a و b ، 7 عدد دیگر به گونه‌ای قرار داده‌ایم که تمام اعداد، تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند. اگر عدد وسط 12 باشد، مجموع تمام جمله‌های دنباله کدام است؟

(۱) 108 (۲) 84 (۳) 96 (۴) 120

۱۰- در دنباله‌ی حسابی $\{a_n\}$ اگر $a_1 + a_2 + a_3 = 15$ باشد، مجموع 13 جمله‌ی اول دنباله کدام است؟

(۱) 65 (۲) 130 (۳) $32/5$ (۴) 260

۱۱- در یک دنباله‌ی حسابی غیرثابت، جمله‌ی هفتم نصف جمله‌ی سوم است. مجموع چند جمله‌ی اول از این دنباله برابر صفر است؟

(۱) 18 (۲) 19 (سراسری تجربی فارج از کشور ۸۸)

(۳) 20 (۴) 21

۱۲- در یک دنباله‌ی حسابی جمله‌ی n ام به صورت $a_n = \frac{3}{4}n - 5$ است. مجموع 15 جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۹)

(۱) 120 (۲) 105 (۳) 90 (۴) 135

۱۳- در دنباله‌ی $a_n = n^2 - (n+1)^2$ ، مجموع 19 جمله‌ی اول کدام است؟ (آزاد تجربی ۸۹)

(۱) 1 (۲) -399 (۳) 401 (۴) -400

۱۴- مجموع چند جمله از دنباله‌ی حسابی $2, 6, 10, \dots$ برابر با جمله‌ی سیزدهم است؟ (آزاد پزشکی ۸۵)

(۱) جمله 10 (۲) جمله 6 (۳) جمله 5 (۴) جمله 8

۱۵- مجموع جملات یک دنباله‌ی حسابی 24 و جمله‌ی عمومی آن $a_n = \frac{n}{3} - \frac{1}{6}$ است. تعداد جملات چه قدر است؟

(۱) 12 (۲) 18 (۳) 24 (۴) 48

۱۶- جواب معادله‌ی $\log_{\sqrt{3}} x + \log_{\sqrt[4]{3}} x + \log_{\sqrt[6]{3}} x + \dots + \log_{\sqrt[12]{3}} x = 36$ ، کدام است؟

(۱) 3 (۲) 9 (۳) $\sqrt{3}$ (۴) 27

۱۷- مقدار x از معادله‌ی $1 + 5 + 9 + \dots + x = 231$ کدام است؟ (آزاد ریاضی ۷۳)

(۱) 43 (۲) 39 (۳) 41 (۴) 37

۱۸- در دنباله‌ی حسابی $21, x, -27, \dots$ ، مجموع جملات منفی کدام است؟ (آزاد ریاضی فارج از کشور ۸۷)

(۱) -135 (۲) -150 (۳) -75 (۴) -270

۱۹- در دنباله‌ی حسابی $8, 12, \dots, a, b$ ، مجموع جملاتی که عدد دو رقمی هستند، کدام است؟ (آزاد ریاضی ۷۷)

(۱) 1200 (۲) 1300 (۳) 1196 (۴) 1188

۲۰- مجموع تمام اعداد دو رقمی که رقم یکان آن‌ها 4 باشد، کدام است؟

(۱) 1008 (۲) 486 (۳) 504 (۴) 972

۲۱- اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که آخرین جمله‌ی هر دسته، مجذور کامل باشد: $(1), (2, 3, 4), (5, 6, 7, 8, 9), \dots$

مجموع جملات در دسته‌ی دهم کدام است؟ (سراسری تجربی فارج از کشور ۸۴)

(۱) 1691 (۲) 1710 (۳) 1729 (۴) 1748

۲۲- اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر با شماره‌ی آن دسته باشد،

$(1), (3, 5), (7, 9, 11), \dots$ ، جمله‌ی آخر در دسته‌ی بیستم کدام است؟ (سراسری ریاضی فارج از کشور ۹۱)

(۱) 415 (۲) 419 (۳) 421 (۴) 423

۲۳- مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی از رابطه‌ی $S_n = n^2 + 2n$ به دست می‌آید. مجموع جملات هفتم و هشتم و نهم چه قدر است؟

(۱) 72 (۲) 51 (۳) 36 (۴) 76 (آزاد پزشکی ۸۱)

۲۴- مجموع n جمله‌ی اول از یک دنباله‌ی حسابی به صورت $S_n = \frac{n(n-3)}{4}$ است. مجموع جملاتی از این دنباله که از جمله‌ی بیست و پنجم

شروع و به جمله‌ی سی و پنجم ختم شوند، کدام است؟ (سراسری تجربی فارج از کشور ۸۹)

(۱) 132 (۲) 145 (۳) 148 (۴) 154

۲۵- مجموع n جمله‌ی اول از یک دنباله‌ی حسابی به صورت $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$ است. در این دنباله مجموع جملات با شروع از جمله‌ی

(سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۰)

هفتم و ختم به جمله‌ی هجدهم، کدام است؟

$$9 \quad (1) \quad \frac{29}{3} \quad (2) \quad \frac{49}{3} \quad (3) \quad 18 \quad (4)$$

۲۶- اگر S_n مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی و سه جمله‌ی اول دنباله‌ی S_n به صورت $3, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$ باشند، جمله‌ی چهارم این

(سراسری انسانی ۸۵)

دنباله (S_n) کدام است؟

$$5 \quad (4) \quad \frac{9}{2} \quad (3) \quad 4 \quad (2) \quad \frac{7}{2} \quad (1)$$

۲۷- اختلاف مجموع n عدد طبیعی فرد متوالی (با شروع از ۱) و مجموع $n+1$ عدد طبیعی فرد متوالی اولیه، برابر ۲۷ است. n کدام است؟

(سراسری انسانی ۸۴)

$$16 \quad (4) \quad 15 \quad (3) \quad 14 \quad (2) \quad 13 \quad (1)$$

۲۸- اگر S_n مجموع n جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی $\{a_n\}$ باشد و داشته باشیم $S_7 = S_{10} = 12$ ، مجموع شانزده جمله‌ی اول دنباله‌ی a_n

کدام است؟

$$96 \quad (4) \quad 24 \quad (3) \quad \text{صفر} \quad (2) \quad 120 \quad (1)$$

۲۹- در یک دنباله‌ی حسابی غیر ثابت $\frac{S_7}{S_3} = \frac{49}{9}$ است. مقدار $\frac{a_7}{a_3}$ کدام است؟ (a_n جمله‌ی عمومی و S_n مجموع n جمله‌ی اول دنباله است.)

$$\frac{13}{5} \quad (4) \quad \frac{7}{3} \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad \frac{15}{7} \quad (1)$$

۳۰- در یک دنباله‌ی حسابی $a_1 = 3 + \sqrt{2}$ و $a_7 = 5 + \sqrt{2}$. مجموع چهار جمله‌ی چهارم این دنباله چه قدر از مجموع چهار جمله‌ی دومش

(آزاد ریاضی خارج از کشور ۸۸)

بیشتر است؟

$$32 \quad (4) \quad 16 \quad (3) \quad 64 \quad (2) \quad 8 \quad (1)$$

۳۱- ده عدد جملات متوالی از دنباله‌ی حسابی اند. مجموع ۵ جمله‌ی اول ۵۵ و مجموع ۵ جمله‌ی آخر ۱۳۰ می‌باشد. کوچک‌ترین این اعداد

(سراسری انسانی ۸۷)

کدام است؟

$$6 \quad (4) \quad 5 \quad (3) \quad 4 \quad (2) \quad 3 \quad (1)$$

۳۲- در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع چهار جمله‌ی اول ۱۵ و مجموع پنج جمله‌ی بعدی ۳۰ می‌باشد. جمله‌ی یازدهم این دنباله کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج کشور ۸۵)

$$9 \quad (4) \quad 1/5 \quad (3) \quad 8 \quad (2) \quad 7/5 \quad (1)$$

۳۳- در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع ۵ جمله‌ی اول آن، $\frac{1}{3}$ مجموع پنج جمله‌ی بعدی است. جمله‌ی دوم چند برابر جمله‌ی اول است؟

(سراسری تجربی خارج از کشور ۹۱)

$$\frac{5}{2} \quad (2) \quad \frac{3}{2} \quad (1)$$

$$4 \quad (4) \quad 3 \quad (3)$$

۳۴- مجموع پنج عدد که جملات متوالی از دنباله‌ی حسابی اند برابر ۱۰۵ و مجموع سه عدد بزرگ‌تر، ۶ برابر مجموع دو عدد کوچک‌تر است.

(سراسری انسانی ۸۹)

بزرگ‌ترین این اعداد کدام است؟

$$41 \quad (4) \quad 40 \quad (3) \quad 39 \quad (2) \quad 38 \quad (1)$$

۳۵- در بیست جمله‌ی اول از دنباله‌ی حسابی، مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ می‌باشد. جمله‌ی اول کدام

(سراسری تجربی خارج از کشور ۸۵)

است؟

$$3 \quad (4) \quad 2 \quad (3) \quad 1 \quad (2) \quad \text{صفر} \quad (1)$$

۳۶- در یک دنباله‌ی حسابی اگر یک واحد به قدرنسبت جملات افزوده شود، آن‌گاه به مجموع ۲۰ جمله‌ی اول چه قدر افزوده خواهد شد؟

(سراسری ریاضی ۸۳)

$$190 \quad (4) \quad 180 \quad (3) \quad 170 \quad (2) \quad 160 \quad (1)$$

۳۷- در یک دنباله‌ی حسابی اگر به جمله‌ی اول ۳ واحد اضافه کنیم و از قدرنسبت ۲ واحد کم کنیم، در مجموع بیست جمله‌ی اول چه

تغییری صورت می‌گیرد؟

$$320 \quad (1) \quad 160 \quad (2) \quad 160 \quad \text{واحد اضافه می‌شود.} \quad (3) \quad 320 \quad \text{واحد کم می‌شود.} \quad (4) \quad 160 \quad \text{واحد کم می‌شود.}$$

۳۸- مجموع اولین بیست جمله‌ی مشترک دنباله‌ی حسابی $1100, 1050, \dots$ و دنباله‌ی حسابی $900, 850, \dots$ کدام است؟

$$2280 \quad (4) \quad 2600 \quad (3) \quad 2500 \quad (2) \quad 2380 \quad (1)$$

۳۹- یک شرکت تولیدی تا پایان سال اول ۸۰۰ واحد کالا تولید می‌کند و در نظر دارد که پس از گذشت هریک سال، مرتباً ۹۰ واحد کالا به تولید سال قبل بیافزاید. پس از گذشت ۴ سال جمعاً چند واحد کالا می‌تواند تولید کند؟

۳۶۸۰ (۱) ۳۷۴۰ (۲) ۳۷۶۰ (۳) ۳۸۶۰ (۴)

۴۰- سعید می‌خواهد یک لپ‌تاپ گاج به قیمت ۴۰۰۰۰۰ تومان خریداری کند. قرار شد پدر سعید به صورت ماهانه به سعید پول بدهد، به این ترتیب که ماه اول ۱۰۰۰۰ تومان و هر ماه ۲۰۰۰ تومان بیشتر از ماه قبل بگیرد. پس از چند ماه سعید می‌تواند پول مورد نیاز برای خرید لپ‌تاپ را داشته باشد؟

۱۲ (۱) ۱۰ (۲) ۲۰ (۳) ۱۸ (۴)

۴۱- کوهنوردی برای صعود به قله، پس از یک ساعت، به ارتفاع ۸۰۰ متری می‌رسد و در هر ساعت متوالی بعدی، ۲۵ متر کم‌تر از ارتفاع قبلی صعود می‌کند. در چند ساعت، این کوهنورد می‌تواند به ارتفاع ۵۷۰ متری صعود کند؟

۱۲ (۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۱۰ (۴)

۴۲- اندازه‌ی پله‌های یک نردبان به‌طور یکنواخت از پایین به بالا، از ۴۵ سانتی‌متر به ۳۰ سانتی‌متر می‌رسد. اگر مجموع طول پله‌ها ۴/۵ متر باشد، این نردبان چند پله دارد؟

۱۵ (۱) ۳۰ (۲) ۱۲ (۳) ۲۴ (۴)



مجموع جملات دنباله هندسی

درسنامه‌ی ۲

یادآوری دنباله هندسی

دنباله‌ی هندسی یک دنباله از اعداد است که در آن (غیر از جمله‌ی اول) هر جمله از ضرب جمله‌ی قبلی در یک عدد ثابت به دست می‌آید. این عدد ثابت را قدرنسبت می‌گوییم و با q نمایش می‌دهیم. در دنباله‌ی هندسی $\{a_n\}$:

(۱) جمله‌ی اول است.

(۲) اگر قدرنسبت q باشد، $a_2 = a_1 q$ ، $a_3 = a_2 q = a_1 q^2$ ، ...، $a_n = a_{n-1} q$ است. ($q \neq 0$)

(۳) جمله‌ی n ام با داشتن جمله‌ی اول (a_1) و قدرنسبت (q)، از رابطه‌ی $a_n = a_1 q^{n-1}$ به دست می‌آید.

(۴) جمله‌ی n ام با داشتن جمله‌ی m ام (a_m) و قدرنسبت (q)، از رابطه‌ی $a_n = a_m q^{n-m}$ به دست می‌آید.

(۵) اگر a_p و a_q دو جمله‌ی متفاوت از این دنباله باشند، $a_p = a_q q^{p-q}$ است.

(۶) بین جملات دنباله‌ی هندسی رابطه‌ی نمایی حاکم است. به‌طور کلی هر نمایش به فرم $a_n = pr^{\alpha n + \beta}$ ، نمایش یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت r^α است. برای یافتن هر جمله کافی است به جای n ، شماره‌ی جمله را قرار دهیم.

(۷) هر گاه بخواهیم بین دو عدد a و b ، تعداد m عدد را طوری قرار دهیم که دنباله‌ی اعداد حاصل، تشکیل یک دنباله‌ی هندسی دهند، قدرنسبت این دنباله (q) از رابطه‌ی $q^{m+1} = \frac{b}{a}$ به دست می‌آید.

(۸) در دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت q و جمله‌ی اول $a_1 \neq 0$ ، اگر $q > 0$ باشد، آن‌گاه دنباله یکنوا و اگر $q < 0$ باشد، دنباله غیریکنوا است.

(۹) در دنباله‌ی هندسی $\{a_n\}$ ، برای هر p, q, n, m و l طبیعی که در رابطه‌ی $p + q = n + m = 2l$ صدق کنند، داریم:

$$n + m = p + q = 2l \Rightarrow a_n \times a_m = a_p \times a_q = (a_l)^2$$

مجموع جملات دنباله هندسی

در دنباله‌ی هندسی $\{a_n\}$ ، مجموع n جمله‌ی اول را با نماد S_n نمایش می‌دهند و تعریف می‌شود:

اگر a_1 جمله‌ی اول و a_{n+1} جمله‌ی $(n+1)$ ام و q قدرنسبت دنباله‌ی هندسی باشند ($q \neq 1$)، مجموع n جمله‌ی اول از رابطه‌های زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1} \quad \text{یا} \quad S_n = \frac{a_1-a_{n+1}}{1-q} = \frac{a_{n+1}-a_1}{q-1}$$

مثال: در یک دنباله‌ی هندسی غیرصعودی، جمله‌ی سوم برابر ۱۵ و جمله‌ی پنجم برابر ۶۰ است. مجموع ۴ جمله‌ی اول را بیابید.

$$\begin{cases} a_3 = 15 \\ a_5 = 60 \end{cases} \Rightarrow q^{5-3} = \frac{60}{15} = 4 \Rightarrow q^2 = 4 \Rightarrow q = \pm 2 \xrightarrow{\text{غیرصعودی}} q = -2 \quad (*)$$

$$a_3 = a_1 q^2 \xrightarrow{(*)} 15 = a_1 (-2)^2 \Rightarrow a_1 = \frac{15}{4}$$

روش اول:

$$S_f = \frac{a_1(1-q^f)}{1-q} = \frac{a_1 = \frac{15}{4}}{q = -2} = \frac{15}{4} \frac{(1-(-2)^f)}{1-(-2)} = \frac{15}{4} \frac{(-15)}{3} = -\frac{75}{4}$$

روش دوم:

$$S_f = \frac{a_1 - a_{f+1}}{1-q} = \frac{\frac{15}{4} - 60}{1-(-2)} = -\frac{75}{4}$$

$$\frac{S_{2n}}{S_n} = q^n + 1 \Rightarrow \frac{S_{2n} - S_n}{S_n} = q^n$$

نکته ۱: اگر در دنباله هندسی $\{a_n\}$ ، مجموع n جمله اول را با نماد S_n نمایش دهیم، داریم:

مثال: در یک دنباله هندسی مجموع هشت جمله اول، $\frac{5}{4}$ مجموع چهار جمله اول است. جمله هفتم چند برابر جمله اول است؟

$$\frac{S_8}{S_4} = \frac{S_{2 \times 4}}{S_4} = q^4 + 1 \xrightarrow{S_8 = \frac{5}{4} S_4} q^4 + 1 = \frac{5}{4} \Rightarrow q^4 = \frac{1}{4} \Rightarrow q = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (*)$$

پاسخ ✓

$$\frac{a_7}{a_1} = q^{7-1} = q^6 \xrightarrow{(*)} \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6 = \frac{1}{8}$$

نکته ۲: برای یافتن جمله عمومی از روی S_n ، می توان از رابطه $a_n = S_n - S_{n-1}$ استفاده کرد. همچنین داریم $a_1 = S_1$ و $a_2 = S_2 - S_1$ ، در

$$\text{نتیجه ۱-} \quad q = \frac{S_2 - S_1}{S_1} = \frac{S_2}{S_1} - 1$$

$$a_m + a_{m+1} + \dots + a_n = S_n - S_{m-1}$$

نکته ۳: مجموع جملات m تا n ($m < n$)، برابر است با:

در دنباله هندسی، اگر $|q| < 1$ باشد، جملات دنباله رفته رفته از لحاظ قدرمطلق کوچک تر می شوند. در این حالت مجموع همه جملات که به اختصار به آن «حد مجموع» گفته می شود از رابطه $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$ به دست می آید.

مثال: حاصل مجموع $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$ چه قدر است؟

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ q = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow S_\infty = \frac{1}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}$$

پاسخ ✓

۴۳- دنباله هندسی $\dots, \frac{1}{4}, x, 2$ غیرنزولی است. مجموع شش جمله اول آن کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۶)

$$\frac{41}{32} \quad (1) \quad \frac{21}{16} \quad (2) \quad \frac{11}{8} \quad (3) \quad \frac{23}{16} \quad (4)$$

۴۴- بین دو عدد 2 و $16\sqrt{2}$ ، شش عدد چنان درج شده اند که هشت عدد حاصل، دنباله هندسی تشکیل داده اند. مجموع این هشت عدد کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۸)

$$30(2 + \sqrt{2}) \quad (1) \quad 48\sqrt{2} \quad (2) \quad 30(\sqrt{2} + 1) \quad (3) \quad 36(\sqrt{2} + 1) \quad (4)$$

۴۵- بین دو عدد 324 و 4 ، سه عدد چنان درج شده است که پنج عدد حاصل تشکیل یک دنباله هندسی دهند، مجموع این ۵ عدد مثبت کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۱)

$$482 \quad (1) \quad 484 \quad (2) \quad 486 \quad (3) \quad 488 \quad (4)$$

۴۶- در یک دنباله هندسی صعودی به صورت $\dots, b, 9a, 4, \dots$ مجموع شش جمله اول کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۹)

$$81 \frac{3}{8} \quad (1) \quad 81 \frac{7}{8} \quad (2) \quad 82 \frac{3}{8} \quad (3) \quad 83 \frac{1}{8} \quad (4)$$

۴۷- حاصل $A = (1 + x + x^2 + \dots + x^8)(1 - x + x^2 - \dots + x^8)$ به ازای $x = \sqrt{2}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۲)

$$507 \quad (1) \quad 511 \quad (2) \quad 512 \quad (3) \quad 516 \quad (4)$$

۴۸- مجموع چند جمله هندسی $\dots, 24, -12, 6, \dots$ برابر 1026 است؟ (آزاد تجربی ۸۰)

$$9 \quad (1) \quad 8 \quad (2) \quad 6 \quad (3) \quad 12 \quad (4)$$

۴۹- در یک دنباله هندسی، هر جمله $\frac{2}{3}$ جمله قبلی آن است. اگر مجموع پنج جمله اول آن $\frac{211}{27}$ باشد، جمله اول کدام است؟

$$1 \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 4 \quad (4)$$

(سراسری انسانی خارج از کشور ۹۰)



۵۰- در یک دنباله هندسی، جمله اول دو واحد کم تر از جمله پنجم است. اگر مجموع چهار جمله اول دنباله مساوی ۶ باشد، قدرنسبت دنباله کدام است؟

$$(1) \quad 4 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad \frac{3}{4} \quad (4) \quad \frac{4}{3}$$

۵۱- در یک دنباله هندسی، مجموع ۱۹ جمله اول ۶۴۰ واحد از مجموع ۱۰ جمله اول همان دنباله بیشتر است. اگر قدرنسبت دنباله ۲ باشد، آن گاه مجموع ۹ جمله اول دنباله کدام است؟

$$(1) \quad \frac{3}{4} \quad (2) \quad \frac{5}{4} \quad (3) \quad \frac{3}{8} \quad (4) \quad \frac{5}{8}$$

۵۲- در یک دنباله هندسی با قدرنسبت $q = 2$ ، مجموع شش جمله اول چند برابر مجموع سه جمله اول است؟ (آزاد ریاضی ۸۶)

$$(1) \quad 6 \quad (2) \quad 7 \quad (3) \quad 8 \quad (4) \quad 9$$

۵۳- در یک دنباله هندسی مجموع ده جمله اول $(1 + \sqrt{4})$ برابر مجموع ۵ جمله اول است. در این دنباله مجموع ۸ جمله اول چند برابر مجموع چهار جمله اول است؟ (آزاد ریاضی ۸۹)

$$(1) \quad 5 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 9 \quad (4) \quad 17$$

۵۴- در دنباله هندسی ... ، ۱، ۲، ۴، مجموع چهارده جمله اول چند برابر مجموع هفت جمله اول آن است؟ (سراسری تجربی فارغ از کشور ۹۰)

$$(1) \quad 65 \quad (2) \quad 63 \quad (3) \quad 127 \quad (4) \quad 129$$

۵۵- در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله اول ۱۵۳ می باشد. جمله اول چند برابر جمله پنجم است؟ (سراسری ریاضی ۸۹)

$$(1) \quad \frac{81}{16} \quad (2) \quad 8 \quad (3) \quad 9 \quad (4) \quad 16$$

۵۶- در دنباله هندسی ... ، $\frac{1}{4}$ ، ۲، مجموع پنج جمله اول چند برابر مجموع پنج جمله دوم است؟ (آزاد تجربی ۸۱)

$$(1) \quad 2^{10} \quad (2) \quad 2^2 \quad (3) \quad 2 \quad (4) \quad 2^5$$

۵۷- کارفرمایی به یک کارگر پیشنهاد کرد که دستمزد روز اول را ۳۲۰ تومان بپردازد و تا پایان ۶ روز کاری هفته، هر روز دستمزد او را $\frac{1}{5}$ برابر دستمزد روز قبل پرداخت کند. مجموع دستمزدهای ۶ روز اول هفته کدام است؟

$$(1) \quad 6650 \quad (2) \quad 6750 \quad (3) \quad 6850 \quad (4) \quad 6950$$

۵۸- طول ضلع مربعی ۱ متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می کنیم، سپس نیمی از مساحت باقی مانده را رنگ می کنیم و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی مانده از مرحله قبل را رنگ می کنیم. حداقل پس از چند مرحله بیش از ۹۰ درصد مربع رنگ شده است؟

$$(1) \quad 6 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 4 \quad (4) \quad 5$$

۵۹- حد مجموع جملات دنباله هندسی ... ، $\frac{27}{16}$ ، $\frac{9}{4}$ ، ۳، کدام است؟ (سراسری انسانی فارغ از کشور ۸۸)

$$(1) \quad 9 \quad (2) \quad 12 \quad (3) \quad 12\frac{1}{5} \quad (4) \quad 13\frac{1}{5}$$

۶۰- حاصل $\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^3} + \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2} + \frac{1}{\sqrt{2}+1} - 1$ کدام است؟

$$(1) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2) \quad 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3) \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (4) \quad 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۶۱- مجموع همگی جملات دنباله \dots ، $(\log_{10} 2)^3$ ، $(\log_{10} 2)^2$ ، $\log_{10} 2$ ، کدام است؟

$$(1) \quad \log_5 4 \quad (2) \quad \log_2 5 \quad (3) \quad \log_5 2 \quad (4) \quad \log_4 5$$

۶۲- حاصل عبارت $\dots + (\frac{1}{8} + \frac{1}{64}) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{16}) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{4})$ ، کدام است؟ (آزاد ریاضی ۷۸)

$$(1) \quad 1 \quad (2) \quad \frac{4}{3} \quad (3) \quad 2 \quad (4) \quad \frac{5}{4}$$

۶۳- با ضرب هر یک از جملات دنباله هندسی بی پایان ... ، ۲، ۴، ۸، ۱۶ در قدرنسبت آن، حد مجموع دنباله به وجود آمده چه عددی می شود؟

$$(1) \quad 25 \quad (2) \quad 45 \quad (3) \quad 75 \quad (4) \quad 100$$

۶۴- در یک دنباله هندسی جمله سوم ۲۴ و جمله چهارم ۱۶ می باشد. مجموع بی شمار جمله این دنباله کدام است؟

$$(1) \quad 152 \quad (2) \quad 156 \quad (3) \quad 162 \quad (4) \quad 168$$

(سراسری انسانی فارغ از کشور ۸۹)

۶۵- حد مجموع جملات دنباله هندسی که جمله n ام آن برابر $a_n = 15\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ است، برابر است با: (آزاد پزشکی ۷۳)

$$-9 \quad (1) \quad 9 \quad (2)$$

$$12 \quad (3) \quad 15 \quad (4)$$

۶۶- اگر مجموع همه جملات دنباله هندسی با جمله عمومی $a_n = 5q^{2n-1}$ برابر ۶- باشد، قدرنسبت این دنباله کدام است؟

$$\frac{4}{9} \quad (1) \quad -\frac{4}{9} \quad (2) \quad \frac{2}{3} \quad (3) \quad -\frac{2}{3} \quad (4)$$

۶۷- اگر جمله دوم یک دنباله هندسی برابر ۳ و مجموع تمام جملات آن ۱۲ باشد، آن گاه قدرنسبت این دنباله هندسی کدام است؟

$$\frac{2}{5} \quad (1) \quad \frac{3}{7} \quad (2) \quad \frac{1}{2} \quad (3) \quad \frac{4}{11} \quad (4)$$

۶۸- در یک دنباله هندسی نزولی نامحدود، جمله اول برابر با نصف مجموع جملات بعدی است. جمله اول چند برابر جمله سوم است؟

$$\frac{9}{4} \quad (1) \quad \frac{3}{4} \quad (2) \quad \frac{9}{2} \quad (3) \quad \frac{3}{2} \quad (4) \quad (\text{سراسری ریاضی ۷۵})$$

۶۹- اگر در یک دنباله هندسی با جملات منفی، مجموع هشت جمله اول با مجموع بقیه جملات برابر باشد، قدرنسبت دنباله کدام است؟

$$\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \quad (1) \quad -\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \quad (2) \quad \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \quad (3) \quad -\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \quad (4)$$

۷۰- اگر مجموع همه جمله‌های یک دنباله هندسی برابر با ۱۰ و مجموع مربعات تمام جملات این دنباله برابر $\frac{100}{3}$ باشد، مجموع جمله اول و قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟

$$\frac{13}{3} \quad (1) \quad \frac{9}{4} \quad (2) \quad \frac{11}{2} \quad (3) \quad \frac{12}{5} \quad (4)$$

۷۱- در یک دنباله هندسی نزولی، مجموع جملات مرتبه‌ی فرد ۵۴ و مجموع جملات مرتبه‌ی زوج ۱۸ است. جمله سوم آن کدام است؟

$$4 \quad (1) \quad 8 \quad (2) \quad \frac{16}{3} \quad (3) \quad \frac{8}{3} \quad (4)$$

۷۲- قدرنسبت یک دنباله هندسی $\frac{1}{10}$ و مجموع تمام جملات آن ۱ است. اگر جمله اول و قدرنسبت یک دنباله حسابی به ترتیب برابر

جمله اول و قدرنسبت دنباله هندسی مذکور باشد؛ مجموع سه جمله نخست دنباله حسابی برابر است با: (آزاد انسانی ۸۹)

$$2/7 \quad (1) \quad 2 \quad (2)$$

$$3 \quad (3) \quad 3/3 \quad (4)$$

۷۳- جمله‌های اول و دوم یک دنباله حسابی و یک دنباله هندسی به ترتیب با هم برابرند. مجموع سه جمله نخست دنباله حسابی

برابر ۱۸ و قدرنسبت دنباله هندسی $\frac{2}{3}$ است. حد مجموع دنباله هندسی، مساوی با چه عددی است؟ (آزاد انسانی ۸۶)

$$19 \quad (1) \quad 27 \quad (2)$$

$$36 \quad (3) \quad 48 \quad (4)$$

۷۴- موجی بر روی نیم‌دایره‌های بالای یک محور با قطر اولیه‌ی ۱ واحد حرکت می‌کند و هر بار که به محور برخورد می‌کند، ۲۰ درصد از طول

قطر آن کاسته می‌شود. اندازه‌ی محیط این نیم‌دایره‌های متوالی، دنباله‌ای از اعداد حقیقی است. مجموع جملات این دنباله کدام است؟

$$2\pi \quad (1) \quad 3\pi \quad (2)$$

$$\frac{3}{2}\pi \quad (3) \quad \frac{5}{2}\pi \quad (4)$$

۷۵- توپی را از ارتفاع a متری رها می‌کنیم. اگر پس از هر بار برخورد به زمین، نصف ارتفاع قبلی بالا رود، مجموع تمام مسافت‌هایی که توپ

طی می‌کند کدام است؟

$$\frac{3}{2}a \quad (1) \quad 2a \quad (2) \quad \frac{5}{2}a \quad (3) \quad 3a \quad (4)$$

۷۶- اگر اوساط اضلاع مربعی به ضلع a را به هم وصل کنیم تا مربع جدیدی به وجود آید و این عمل را به دفعات تکرار کنیم، مجموع

مساحت‌های همه این مربع‌ها کدام است؟

$$\frac{a^2}{4} \quad (1) \quad \frac{a^2}{2} \quad (2) \quad 2a^2 \quad (3) \quad 3a^2 \quad (4)$$



تقسیم چندجمله‌ای‌ها و بخش پذیری

درسنامه‌ی ۳

قضیه‌ی تقسیم

اگر چندجمله‌ای $P(x)$ از درجه‌ی n را بر چندجمله‌ای $B(x)$ از درجه‌ی m تقسیم کنیم ($m \leq n$)، خارج قسمت و باقی‌مانده‌ی منحصر به فردی مانند $Q(x)$ و $R(x)$ پدید می‌آید که در آن $Q(x)$ از درجه‌ی $(n-m)$ و $R(x)$ حداکثر از درجه‌ی $(m-1)$ است. داریم:

$$P(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

باقی‌مانده از خارج قسمت مقسوم‌علیه از مقسوم از
درجه‌ی حداکثر از درجه‌ی $m-1$ درجه‌ی n درجه‌ی m

نکته ۱: باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $x-a$ برابر است با $P(a)$.

نکته ۲: باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $ax+b$ برابر است با $P(-\frac{b}{a})$.

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x) = x^4 + 3x^2 + 2x$ بر $2x-1$ را بیابید.

پاسخ: ✓

$$2x-1=0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} + \frac{3}{4} + 1 = \frac{29}{16}$$

نکته ۳: هرگاه $R(x) = 0$ باشد، $P(x)$ بر $B(x)$ بخش پذیر خواهد بود و برعکس.

نکته ۴: برای یافتن باقی‌مانده‌ی تقسیم یک چندجمله‌ای به چندجمله‌ای دیگر، مقسوم‌علیه را برابر صفر قرار می‌دهیم، نتیجه‌ی به دست آمده را در داخل مقسوم قرار می‌دهیم.

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x) = x^3 + x^2 + x - 1$ بر $x^2 - 1$ را بیابید.

پاسخ: ✓

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \quad (*)$$

$$P(x) = x^3 + x^2 + x - 1 = x^2 x + x^2 + x - 1 \Rightarrow R(x) \stackrel{(*)}{=} x \times 1 + 1 + x - 1 = 2x$$

نکته ۵: اگر $P(x)$ بر $(x-x_1)$ و $(x-x_2)$ و ... و $(x-x_n)$ بخش پذیر باشد، داریم:

$$P(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) \cdot Q(x)$$

نکته ۶: اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $T(x)$ برابر $R(x)$ باشد، با کم کردن هر عبارتی به صورت $T(x) + R(x)$ از $P(x)$ ، عبارت حاصل بر $T(x)$ بخش پذیر می‌شود.

نکته ۷: هرگاه باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارتی (اغلب با درجه‌ی بزرگ) بر عبارتی مانند $x^2 \pm x + 1$ یا $x^2 \pm 2x + 4$ (که با اتحاد چاق و لاغر ارتباط دارند) خواسته شود، قضیه‌ی تقسیم را نوشته و طرفین را در قسمت لاغر ($x^2 + 2x + 4$ یا $x^2 - 2x + 4$) ضرب می‌کنیم.

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم $x^{26} - x + 1$ بر $x^2 - x + 1$ را بیابید.

پاسخ: ✓

$$x^{26} = (x^2 - x + 1)Q(x) + R(x) \xrightarrow{\times(x+1)} x^{26}(x+1) = (x+1)(x^2 - x + 1)Q(x) + (x+1)R(x)$$

$$\Rightarrow x^{27} + x^{26} = (x^3 + 1)Q(x) + (x+1)R(x)$$

باقی‌مانده‌ی تقسیم $x^{27} + x^{26}$ بر $x^3 + 1$ برابر است با $R_1(x) = (x+1)R(x)$. داریم:

$$x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1 \quad (*)$$

$$P_1(x) = (x^3)^9 + (x^3)^8 x^2 \xrightarrow{(*)} R_1(x) = -1 + x^2 = (x+1) \underbrace{(x-1)}_{R(x)}$$

بنابراین باقی‌مانده‌ی تقسیم $x^{26} - x + 1$ بر $x^2 - x + 1$ برابر است با $(x-1)$.

نکته ۸:

$x^n + a^n$ بر $x+a$ بخش پذیر است، هرگاه n عددی فرد باشد.

$x^n + a^n$ بر $x-a$ هیچ‌گاه بخش پذیر نیست.

$x^n - a^n$ بر $x+a$ بخش پذیر است، هرگاه n عددی زوج باشد.

$x^n - a^n$ بر $x-a$ همواره بخش پذیر است.

نکته ۹:

$$(x^n - 1) = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)$$

اگر n عددی طبیعی باشد، داریم:

$$(x^n + 1) = (x + 1)(x^{n-1} - x^{n-2} + x^{n-3} - \dots + 1)$$

اگر n عددی فرد باشد، داریم:

حالت کلی تر:

$$(x^n - a^n) = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + a^{n-1})$$

اگر n عددی طبیعی باشد، داریم:

$$(x^n + a^n) = (x + a)(x^{n-1} - x^{n-2}a + \dots + a^{n-1})$$

اگر n عددی فرد باشد، داریم:

۷۷- اگر خارج قسمت تقسیم $5x^3 - 14x + 3$ بر $x - 2$ یک چندجمله‌ای باشد، مقدار آن به ازای $x = -2$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۷۶)

- (۱) -9 (۲) -4 (۳) 6 (۴) 12

۷۸- در تقسیم عبارت $x^3 + (x+2)^2(x-2) - 4x^2$ بر $x^2 - 4$ ، خارج قسمت چه قدر است؟ (آزاد ریاضی ۸۱)

- (۱) $x^2 - 2x$ (۲) $x - 1$ (۳) $2x - 2$ (۴) $2x - 4$

۷۹- اگر باقی مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $5x - 1$ برابر R باشد، باقی مانده‌ی تقسیم $3f(x)$ بر $x - \frac{1}{5}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{5}R$ (۲) $\frac{5}{3}R$ (۳) $\frac{1}{5}R$ (۴) $3R$

۸۰- باقی مانده‌ی تقسیم عبارت $x^6 - ax^5 + x^4 + 2ax + 1$ بر $x + 1$ برابر 4 است. a کدام می‌باشد؟ (سراسری ریاضی ۸۰)

- (۱) -4 (۲) -1 (۳) 1 (۴) 4

۸۱- اگر باقی مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $2x^2 + mx + 2$ بر $x + 1$ برابر 2 باشد، باقی مانده‌ی تقسیم آن بر $x - 1$ کدام است؟

(سراسری ریاضی ۷۰) (۱) -4 (۲) -6 (۳) 4 (۴) 6

۸۲- دو عبارت $P(x) = 2x^2 + x + 1$ و $Q(x) = 3x^3 + ax + 2$ در تقسیم بر $x + 1$ ، باقی مانده‌ی مساوی دارند. a کدام است؟

- (۱) -1 (۲) -3 (۳) 1 (۴) 3

۸۳- اگر چندجمله‌ای $P(x) = x^3 + Ax + B$ بر $x + 1$ بخش پذیر بوده و باقی مانده‌ی تقسیم آن بر $x - 2$ مساوی -3 باشد، باقی مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $x - 1$ کدام است؟

- (۱) -6 (۲) -5 (۳) -4 (۴) -3

۸۴- $f(x)$ چندجمله‌ای درجه دومی است که بر $x + 1$ و $x - 3$ بخش پذیر می‌باشد. اگر $f(0) = -9$ باشد، باقی مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x - 1$ کدام است؟

- (۱) -18 (۲) -6 (۳) -15 (۴) -12

۸۵- چندجمله‌ای $f(x)$ را یک بار بر $x + 1$ و بار دیگر بر $x - 1$ تقسیم کرده‌ایم و باقی مانده‌ها به ترتیب 1 و 3 شده‌اند. باقی مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - 1$ کدام است؟

- (۱) $x + 3$ (۲) $x + 2$ (۳) $2x + 2$ (۴) $2x + 3$

۸۶- اگر باقی مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - 4$ برابر $x - 1$ ، $x - 2$ برابر A و $x + 2$ برابر B باشد، آن‌گاه $A - B$ کدام است؟ (آزاد ریاضی ۹۰)

- (۱) 8 (۲) 2 (۳) -2 (۴) -8

۸۷- باقی مانده‌ی تقسیم عبارت $x^8 + x^7 + x^5 + x^3 + x + 1$ بر $x^2 - 1$ کدام است؟ (آزاد ریاضی ۸۴)

- (۱) $x + 1$ (۲) $5x + 1$ (۳) $11x + 1$ (۴) $6x + 1$

۸۸- باقی مانده‌ی تقسیم $4 - 2x + 2x^3 - 3x^5 + x^8$ بر $x^2 - x$ کدام است؟

- (۱) $-2x + 4$ (۲) $-4x + 2$ (۳) $-x + 4$ (۴) $-2x + 2$

۸۹- اگر $R(x)$ باقی مانده‌ی تقسیم عبارت $x^{81} + x^{41} - x^{21} + x^7 + x$ بر $x^3 - x$ باشد، $R(1)$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۷۱)

- (۱) 3 (۲) 5 (۳) 1 (۴) صفر

۹۰- عبارت $x^6 + 4ax^2 + 2bx + 1$ بر $x^2 - 4$ بخش پذیر است. $a + b$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۶)

- (۱) $-\frac{15}{8}$ (۲) $-\frac{17}{16}$ (۳) $\frac{17}{16}$ (۴) $\frac{15}{8}$