درسنامه ۱

اعداد حقیقی و خط حقیقی

اعداد حقیقی اعدادی هستند که می‌توان آن‌ها را به صورت اعشاری بیان کرد. این اعداد به دو دسته‌ی بزرگ یعنی اعداد گویا و اعداد گنگ تقسیم می‌شوند.

اعداد گویا: اعدادی هستند که می‌توان آن‌ها را به صورت یک کسر متعارفی نوشت، به‌طوری که صورت و مخرج آن‌ها عدد صحیح بوده و مخرج غیرصفر باشد. مانند: $\frac{1}{4}, \frac{-3}{4}, 0, 2/71894, 2\frac{4}{5}, \ldots$

اعداد گنگ (یا اصم): اعدادی هستند که نمی‌توان آن‌ها را به صورت یک کسر متعارفی نوشت. مانند: $\sqrt{2}, e, \pi, \ldots$

مثال ۱

ثابت کنید که $\sqrt{3}$ عدد گویا نیست. ($\sqrt{3}$ گنگ است.) (تمرین کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۷- شماره‌ی ۱۱)

☑ **پاسخ:** فرض خلف: فرض کنیم که $\sqrt{3}$ عددی گویا باشد. در این صورت طبق تعریف می‌توان $\sqrt{3}$ را به صورت یک کسر متعارفی نوشت. یعنی: $\sqrt{3} = \frac{p}{q} \ , \ p,q \in \mathbb{Z} \ , \ q \neq 0$

که در آن $\frac{p}{q}$، تا حد امکان ساده شده و $(p,q)=1$ ($\frac{p}{q}$ کسر تحویل‌ناپذیر است.)، داریم:

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q} \xrightarrow{\text{طرفین به توان } 2} 3 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 3q^2 \quad (*)$$

یعنی p^2 مضرب ۳ است، پس عدد p هم مضرب ۳ خواهد بود: $p = 3k, k \in \mathbb{Z}$

با جایگذاری $k \in \mathbb{Z}, p = 3k$ در رابطه‌ی $(*)$ داریم: $(3k)^2 = 3q^2 \Rightarrow 9k^2 = 3q^2 \Rightarrow q^2 = 3k^2, k \in \mathbb{Z}$

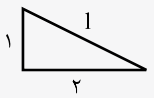
یعنی q^2 مضرب ۳ است، پس q نیز مضرب ۳ می‌باشد. بنابراین صورت و مخرج کسر $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ بر عدد ۳ بخش‌پذیر هستند و این با $(p,q)=1$ در تناقض است. لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

همان طور که می‌دانیم «بین هر دو عدد گویا، بی‌شمار عدد گنگ و بی‌شمار عدد گویای دیگر وجود دارد.» و هم‌چنین «بین هر دو عدد گنگ، بی‌شمار عدد گویا و بی‌شمار عدد گنگ دیگر وجود دارد.» به‌عبارت دیگر این دو دسته از اعداد به‌گونه‌ای بسیار فشرده، به نوعی با هم تنیده شده‌اند. (خاصیت پیوستاری اعداد حقیقی)

به زبان هندسی، می‌توانیم اعداد حقیقی را به صورت نقاط یک خط مستقیم نشان دهیم. چنین خط مستقیمی را خط حقیقی یا محور حقیقی می‌نامیم. هر نقطه از محور حقیقی، نمایش یک و فقط یک عدد حقیقی و هر عدد حقیقی متناظر با نقطه‌ای بر این خط است.

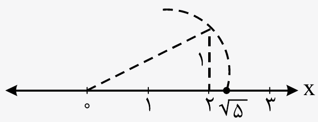
مثال ۲

عدد $\sqrt{5}$ را روی محور اعداد حقیقی نمایش دهید.



☑ **پاسخ:** به کمک رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه داریم: $l = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

پس:



اعداد حقیقی

در این بخش اعداد حقیقی را معرفی کرده و خواص آن (۱. خواص جبری، ۲. خواص ترتیب) را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تعریف یک عمل دوتایی روی مجموعه‌ی A، تابعی است که اعضای دامنه‌ی آن دوتایی مرتب (a,b) (یا زوج مرتب (a,b))، $a,b \in A$ بوده و بُرد آن مجموعه‌ی A است.

یک عمل دوتایی دو عضو از مجموعه‌ی A را با رعایت ترتیب به عنوان ورودی دریافت کرده و آن‌ها را به عضو دیگری از مجموعه‌ی A نظیر می‌کند.

مثال اگر $A = \{*, o\}$ باشد، تابع f که به صورت زیر تعریف شده است، یک عمل دوتایی می‌باشد:

$$f(*,o) = o \quad , \quad f(o,*) = o \quad , \quad f(*,*) = * \quad , \quad f(o,o) = *$$

تعریف **اصل موضوع** یا به اختصار **اصل**، حکم یا گزاره‌ای است که آن را بدون دلیل و برهان می‌پذیریم.

اصل‌های جمعی در اعداد حقیقی

۱) در مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ یک عمل دوتایی وجود دارد که آن را عمل جمع می‌نامیم.

این عمل دوتایی، زوج مرتب (a,b) را که $a,b\in\mathbb{R}$ هستند، به $a+b$ نظیر می‌کند که $a+b\in\mathbb{R}$ است.

۲) خاصیت جابه‌جایی جمع: برای هر $x,y\in\mathbb{R}$، داریم: $x+y=y+x$

۳) خاصیت شرکت‌پذیری جمع: برای هر $x,y,z\in\mathbb{R}$ داریم: $(x+y)+z=x+(y+z)$

۴) وجود عضو همانی جمع: در مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ عضوی مانند O وجود دارد که داریم: $O+x=x$

O را **عضو همانی جمع** در $\mathbb{R}$ نامیده و آن را با ۰ (صفر) نمایش می‌دهیم.

۵) وجود عضو قرینه: برای هر عضو x از $\mathbb{R}$، عددی مانند y در $\mathbb{R}$ وجود دارد که $x+y=0$ می‌باشد. در این صورت y را **قرینه‌ی x** می‌نامیم و معمولاً آن را با $(-x)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۳

آ) ثابت کنید عضو همانی جمع یعنی صفر در دستگاه اعداد حقیقی منحصر به فرد است. (مثال کتاب درسی- صفحه‌ی ۴)

ب) ثابت کنید که قرینه‌ی هر عضو در $\mathbb{R}$ منحصر به فرد است. (مثال کتاب درسی- صفحه‌ی ۴)

پ) برای هر سه عدد حقیقی x، y و z، اگر $x+z=y+z$ باشد، نشان دهید که $x=y$. (قانون حذف) (تمرین کتاب درسی- صفحه‌ی ۵- شماره‌ی ۲)

☑ **پاسخ:** آ) فرض کنیم که دو عضو O_1 و O_2 از مجموعه‌ی $\mathbb{R}$، عضو همانی باشند، پس:

$$O_1 \xlongequal{\text{چون } O_2 \text{ عضو همانی است.}} O_1+O_2 \xlongequal{\text{چون } O_1 \text{ عضو همانی است.}} O_2 \Rightarrow O_1=O_2$$

ب) فرض کنیم قرینه‌ی هر عضو در $\mathbb{R}$ منحصر به فرد نباشد. مثلاً دو عدد y_1 و y_2 قرینه‌ی عدد x در $\mathbb{R}$ باشند. در این صورت:

$$y_1+x=0 \quad (1) \quad , \quad y_2+x=0 \quad (2)$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$y_2 \xlongequal{\text{صفر عضو همانی است.}} y_2+0 \xlongequal{\text{با توجه به (۱)}} y_2+(y_1+x) \xlongequal{\text{خاصیت جابه‌جایی جمع}} y_2+(x+y_1)$$

$$\xlongequal{\text{خاصیت شرکت‌پذیری جمع}} (y_2+x)+y_1 \xlongequal{\text{با توجه به (۲)}} 0+y_1 \xlongequal{\text{صفر عضو همانی است.}} y_1$$

$\Rightarrow y_1=y_2 \Rightarrow$ قرینه‌ی هر عضو از $\mathbb{R}$ منحصربه فرد است.

پ) می‌دانیم که اگر $z\in\mathbb{R}$ باشد، قرینه‌ی آن یعنی $(-z)$ در $\mathbb{R}$ وجود دارد و $(*)$ $z+(-z)=0$، پس:

$$x \xlongequal{\text{صفر عضو همانی است.}} x+0 \xlongequal{\text{با توجه به } (*)} x+(z+(-z)) \xlongequal{\text{خاصیت شرکت‌پذیری جمع}} (x+z)+(-z)$$

$$\xlongequal{x+z=y+z} (y+z)+(-z) \xlongequal{\text{خاصیت شرکت‌پذیری جمع}} y+(z+(-z)) \xlongequal{\text{با توجه به } (*)} y+0 \xlongequal{\text{صفر عضو همانی است.}} y \Rightarrow x=y$$

تعریف تفریق عدد حقیقی y از عدد حقیقی x، یعنی $x-y$ را به‌صورت حاصل جمع x با قرینه‌ی y تعریف می‌کنیم:

$$x-y=x+(-y)$$

اصل‌های ضربی در اعداد حقیقی

۱) در مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ می‌توان عمل دوتایی دیگری در نظر گرفت که آن را عمل ضرب می‌نامیم. این عمل دوتایی، زوج مرتب (a,b) را که $a,b\in\mathbb{R}$ هستند، به $a\times b$ (یا $a.b$) نظیر می‌کند و $a\times b\in\mathbb{R}$ است.

۲) خاصیت جابه‌جایی ضرب: برای هر $x,y\in\mathbb{R}$، داریم:

$$xy=yx$$

۳) خاصیت شرکت‌پذیری ضرب: برای هر $x,y,z\in\mathbb{R}$، داریم:

$$(xy)z=x(yz)$$

۴) وجود عضو همانی ضرب: در مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ عضوی مانند i وجود دارد که داریم: $i.x = x$

i را **عضو همانی ضرب** در $\mathbb{R}$ نامیده و آن را با ۱ (یک) نمایش می‌دهیم.

۵) وجود عضو وارون: برای هر عضو غیرصفر x از $\mathbb{R}$، عددی منحصر به فرد مانند y در $\mathbb{R}$ وجود دارد که $xy=1$ می‌باشد. در این صورت y را **وارون x** می‌نامیم و معمولاً آن را با x^{-1} یا $\frac{1}{x}$ نمایش می‌دهیم.

توجه عدد «صفر» وارون ندارد. دقت کنید که عباراتی مانند $\frac{1}{0}$ یا $\frac{\text{عدد}}{0}$ تعریف نشده هستند.

توجه مانند مثال (۳) می‌توانید منحصر به فرد بودن عضو همانی ضرب (عدد ۱) و هم‌چنین منحصر به فرد بودن وارون هر عضو از مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ را ثابت کنید.

تعریف اگر y عدد حقیقی غیرصفر باشد، تقسیم عدد حقیقی x بر عدد حقیقی غیرصفر y، یعنی $\frac{x}{y}$ را با حاصل‌ضرب x در معکوس عدد y تعریف می‌کنیم. یعنی: $\frac{x}{y} = x.\frac{1}{y}$

اصل توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع در اعداد حقیقی

اگر x، y و z سه عدد حقیقی باشند، داریم: $x(y+z) = xy + xz$

مثال ۴

برای هر دو عدد حقیقی x و y ثابت کنید که: (تمرین کتاب درسی- صفحه‌ی ۷- شماره‌ی ۳)

آ) $\mathbf{x(-y) = (-x)y = -(xy)}$ ب) $\mathbf{(-x)(-y) = xy}$

☑ **پاسخ:** آ) (۱) $-xy \xlongequal{\text{صفر عضو همانی است.}} x(0) - x(y) = 0 - xy \xlongequal[\text{نسبت به جمع}]{\text{توزیع‌پذیری ضرب}} x(0-y) \xlongequal{\text{صفر عضو همانی است.}} x(-y)$

(۲) $(-x)y \xlongequal{\text{صفر عضو همانی است.}} (0-x)y = 0y - xy = 0 - xy = -xy$

$\xrightarrow{(1),(2)} x(-y) = (-x)y = -xy$

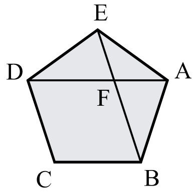
ب) $(-x)(-y) \xlongequal{\text{صفر عضو همانی است.}} (-x)(0-y) \xlongequal[\text{نسبت به جمع}]{\text{توزیع‌پذیری ضرب}} (-x)\times 0 - (-x)(y) = 0 - (-xy) = xy$

۱- اعداد $\sqrt{6}$ و $-1+\sqrt{13}$ را روی محور اعداد حقیقی نمایش دهید.

۲- ثابت کنید $\sqrt{7}$ عددی گنگ است. (مشابه تمرین کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۷- شماره‌ی ۱۱)

۳- ثابت کنید که $\log 3$ گویا نیست. (تمرین کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۷- شماره‌ی ۱۲)

۴- ثابت کنید که در هر پنج ضلعی منتظم با طول ضلع a، نسبت طول قطر به طول ضلع، عددی گنگ است (قضیه‌ی هیپاسوس) (راهنمایی: ابتدا نشان دهید که دو مثلث ABE و FEA در شکل زیر متشابه‌اند.) (تمرین کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۷- شماره‌ی ۱۰)



۵- اگر x و y اعداد حقیقی باشند، هر یک از گزاره‌های زیر را ثابت کنید.

آ) قرینه‌ی قرینه‌ی هر عدد حقیقی، برابر همان عدد حقیقی است. یعنی $-(-x) = x$ (تمرین کتاب درسی- صفحه‌ی ۵- شماره‌ی ۱)

ب) اگر $x - y = 0$، آن‌گاه $x = y$.

۶- آ) ثابت کنید برای هر سه عدد حقیقی x، y و z داریم: $\mathbf{x(y-z) = xy - xz}$

ب) ثابت کنید وارون وارون هر عدد حقیقی غیرصفر x، برابر x است.

۷- ثابت کنید که هرگاه $xy = 0$، آن‌گاه $x = 0$ یا $y = 0$ و برعکس. (تمرین کتاب درسی- صفحه‌ی ۷- شماره‌ی ۲)

درسنامه ۲

نمایش اعشاری اعداد حقیقی

برای هر عدد گویا می‌توانیم یک بسط اعشاری در نظر بگیریم. بسط اعشاری یک عدد گویا ممکن است پایان‌پذیر (مختوم) و یا پایان‌ناپذیر ولی متناوب (متناوب ساده یا متناوب مرکب) باشد.

به عنوان مثال:

بسط اعشاری پایان‌پذیر (مختوم) $\frac{۳}{۴}\in \mathbb{Q},\frac{۳}{۴}=۰/۷۵$

بسط اعشاری پایان‌ناپذیر و متناوب ساده $\frac{۱}{۳}\in \mathbb{Q},\frac{۱}{۳}=۰/۳۳۳۳...=۰/\overline{۳}$

بسط اعشاری پایان‌ناپذیر و متناوب مرکب $\frac{۷}{۳۰}\in \mathbb{Q},\frac{۷}{۳۰}=۰/۲۳۳۳۳...=۰/۲\overline{۳}$

تعریف در بسط اعشاری متناوب ساده یا مرکب، دسته ارقامی که مرتباً تکرار می‌شوند (در بسط اعشاری $\frac{۱}{۳}$ یعنی $۰/۳۳...=۰/\overline{۳}$، عدد ۳ مرتباً تکرار می‌شود) را **دوره‌ی گردش** عدد می‌نامند و بالای ارقامی که دوره‌ی گردش دارند، خط کشیده می‌شود. هم‌چنین ارقامی که بین دوره‌ی گردش و ممیز قرار دارند، (در بسط اعشاری $\frac{۷}{۳۰}$ یعنی $۰/۲۳۳۳...=۰/۲\overline{۳}$، عدد ۲ بین دوره‌ی گردش و ممیز قرار دارد.) **ارقام غیرگردش** می‌نامند.

نکته *اگر بسط اعشاری متناوب (ساده یا مرکب) یک عدد گویا را داشته باشیم، می‌توانیم به کمک فرمول زیر، کسر یا عدد گویای مساوی آن را به‌دست آوریم:*

$$c/a_۱a_۲...a_m\overline{b_۱b_۲...b_n}=c+\frac{a_۱a_۲...a_mb_۱b_۲...b_n-a_۱a_۲...a_m}{\underbrace{۹۹...۹}_{n\text{ تا}}\underbrace{۰۰...۰}_{m\text{ تا}}}$$

یا

$$c/a_۱a_۲...a_m\overline{b_۱b_۲...b_n}=c+\frac{(\text{ارقام بعد از ممیز})-(\text{ارقام غیر گردش})}{\underbrace{۹۹...۹}_{\text{به تعداد ارقام دوره‌ی گردش}}\underbrace{۰۰...۰}_{\text{به تعداد ارقام غیر گردش}}}$$

مثال ۵

اعداد اعشاری زیر را به صورت کسر متعارفی بنویسید.

آ) $۰/۳۴۱$ ب) $۰/\overline{۷۲۱}$ پ) $۱/۹\overline{۱۲}$ ت) $-۲/۶۲\overline{۳}$

☑ **پاسخ**: آ) $۰/۳۴۱=\frac{۳۴۱}{۱۰۰۰}$

ب) $۰/\overline{۷۲۱}=\frac{۷۲۱}{۹۹۹}$

پ) $۱/۹\overline{۱۲}=۱+\frac{۹۱۲-۹}{۹۹۰}=۱+\frac{۹۰۳}{۹۹۰}=۱+\frac{۳۰۱}{۳۳۰}=\frac{۶۳۱}{۳۳۰}$

ت) $-۲/۶۲\overline{۳}=-(۲+\frac{۶۲۳-۶۲}{۹۰۰})=-(۲+\frac{۵۶۱}{۹۰۰})=-(۲+\frac{۱۸۷}{۳۰۰})=\frac{-۷۸۷}{۳۰۰}$

اعداد گنگ بسط اعشاری پایان‌ناپذیر و نامتناوب دارند. برای نمایش بسط اعشاری این اعداد، تقریبی اعشاری (تا چند رقم اعشار) برای آن‌ها در نظر می‌گیریم. مانند:

$\sqrt{۲}=۱/۴۱۴۲۱۳...$

عدد پی (عدد ارشمیدس)، برابر با خارج قسمت تقسیم محیط دایره بر طول قطر آن می‌باشد: $\pi=۳/۱۴۱۵۹۲۶...$

عدد نپرین، این عدد برابر با حاصل $\lim\limits_{n\to +\infty}(۱+\frac{۱}{n})^n$ و عددی گنگ می‌باشد: $e=۲/۷۱۸۲۸۱۸...$

بسته بودن نسبت به اعمال جبری

مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ نسبت به اعمال جبری (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم) بسته است. یعنی این‌که حاصل جمع، تفریق، ضرب و تقسیمِ هر دو عدد حقیقی، یک عدد حقیقی است.

هم‌چنین مجموعه‌ی اعداد گویا نسبت به اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم بسته است. اما در مورد اعداد گنگ چنین نیست، زیرا می‌دانیم که $\sqrt{2}, -\sqrt{2} \in \mathbb{Q}^c$ است، اما

مجموعه‌ی اعداد گنگ نسبت به عمل جمع بسته نیست. $\Leftarrow$ $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0 \notin \mathbb{Q}^c$

مجموعه‌ی اعداد گنگ نسبت به عمل ضرب بسته نیست. $\Leftarrow$ $(\sqrt{2})(-\sqrt{2})=-2 \notin \mathbb{Q}^c$

مجموعه‌ی اعداد گنگ نسبت به عمل تقسیم بسته نیست. $\Leftarrow$ $\dfrac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}=-1 \notin \mathbb{Q}^c$

هم‌چنین مجموعه‌ی اعداد گنگ نسبت به عمل تفریق بسته نیست. به عنوان مثال $\sqrt{2}, \sqrt{2} \in \mathbb{Q}^c$ است، اما: $\sqrt{2}-\sqrt{2}=0 \notin \mathbb{Q}^c$

در مورد اعمال جبری روی اعداد گویا و گنگ قضیه‌ی زیر را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه‌ی ۱: اگر a عددی گویا و غیرصفر و b عددی گنگ باشد، اعداد $a \pm b$، ab، $\dfrac{a}{b}$ و $\dfrac{b}{a}$ گنگ هستند.

مثال ۶

اگر a عددی گویا و α عددی گنگ باشد، کدام یک از عبارات زیر الزاماً گنگ هستند؟

آ) $a^3\alpha - a$ ب) $(\alpha+1)^2$ پ) $a^3\alpha-\alpha$ ت) a^α

ث) $(\alpha^\alpha)^\alpha$ ج) $\dfrac{\alpha^{-1}}{a}$ چ) $\alpha+\alpha^2$ ح) α^4+a

☑ **پاسخ:** آ) چون $a \in \mathbb{Q}$ و اعداد گویا نسبت به اعمال جبری بسته است، داریم $a^3 \in \mathbb{Q}$. بنابراین طبق قضیه‌ی قبل، $a^3\alpha \in \mathbb{Q}^c$ و لذا $a^3\alpha + a \in \mathbb{Q}^c$ است.

ب) اگر $\alpha=\sqrt{2}-1$، پس: $(\alpha+1)^2=(\sqrt{2}-1+1)^2=2 \in \mathbb{Q}$

$\Leftarrow$ $(\alpha+1)^2$ لزوماً گنگ و لزوماً گویا نیست.

پ) اگر $a=1$ باشد، داریم $a^3\alpha-\alpha=\alpha-\alpha=0 \in \mathbb{Q}$، پس $a^3\alpha-\alpha$ لزوماً گنگ نیست.

ت) $\log 3$ عددی گنگ است (با توجه به سؤال ۳). اگر $\alpha=\log 3$ و $a=10$ باشد، آن‌گاه: $a^\alpha=10^{\log 3}=3 \in \mathbb{Q}$

پس a^α لزوماً گنگ نیست.

ث) اگر $\alpha=\sqrt{2}$ باشد، داریم: $(\alpha^\alpha)^\alpha=(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^2=2 \in \mathbb{Q}$

پس $(\alpha^\alpha)^\alpha$ لزوماً گنگ نیست.

ج) چون α گنگ است، پس α^{-1} نیز گنگ است و طبق قضیه‌ی قبل (و با توجه به گویا بودن a)، عدد $\dfrac{\alpha^{-1}}{a}$ لزوماً گنگ است.

چ) عدد $\alpha+\alpha^2$ لزوماً گنگ نیست. زیرا اگر b یک عدد گویا باشد و $\alpha+\alpha^2=b$، آن‌گاه $\alpha^2+\alpha-b=0 \Rightarrow \alpha=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4b}}{2}$

پس اگر b، عددی مانند ۱ باشد، داریم $\alpha=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \in \mathbb{Q}^c$ و ضمناً $\alpha+\alpha^2=1 \in \mathbb{Q}$ خواهد بود. پس $\alpha+\alpha^2$ لزوماً گنگ نیست.

ح) α^4+a لزوماً گنگ نیست. زیرا اگر $\alpha=\sqrt[4]{2}$ و $a=1$ داریم: $\alpha^4+a=2+1=3 \in \mathbb{Q}$

۸- درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را مشخص کنید.
آ) همه‌ی اعداد حقیقی وارون‌پذیر هستند.
ب) مجموعه‌ی اعداد حقیقی نسبت به اعمال جبری (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم) بسته است.
پ) مجموعه‌ی اعداد گنگ نسبت به اعمال جبری (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم) بسته است.
ت) $\frac{۱}{۰} = \infty$
ث) هر عدد حقیقی با بسط اعشاری پایان‌ناپذیر و متناوب، اصم نامیده می‌شود.
ج) همه‌ی اعداد گنگ وارون‌پذیر هستند.
چ) حاصل هر عدد گنگ به توان یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

۹- کسر متعارفی اعداد اعشاری زیر را بنویسید.

آ) $۱/۳۷۳$ ب) $۱/\overline{۳۷۳}$ پ) $۲/۴\overline{۷}$ ت) $۳۰/۰\overline{۷}$

۱۰- اگر α و β اعدادی گنگ باشند، مشخص کنید کدام‌یک از اعداد زیر حتماً گنگ هستند؟

آ) $\frac{\alpha^۳}{\beta}$ ب) $\frac{۱}{\beta}$ پ) $\beta^۲ - ۶\beta + ۱۰$
ت) $\alpha - \beta + \alpha\beta$ ث) $\frac{\beta - ۲}{۳}$

۱۱- اگر a عددی گویا و α عددی گنگ باشد، کدام‌یک از عبارات زیر الزاماً گنگ هستند؟

آ) $\frac{a\alpha^۲ + \alpha}{\alpha a}$ ب) $a(\alpha + \sqrt{۳})$ پ) $\alpha^۲ + a$ ت) $\frac{۱}{a + \alpha}$

درسنامه ۳

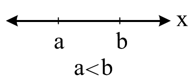
ترتیب و نامساوی‌ها

یکی از خواص مهم اعداد حقیقی، مرتب بودن آن‌ها است.

تعریف اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه a کوچک‌تر از b است اگر و تنها اگر $b-a$ عددی مثبت باشد. این ترتیب را با $a < b$ یا $b > a$ نشان می‌دهیم.

توجه بین هر دو عدد حقیقی، دقیقاً یکی از روابط $a < b$ یا $a = b$ یا $a > b$ برقرار است.[۱]

روی خط حقیقی، هر عدد، از اعدادی که سمت چپ آن قرار گرفته‌اند، بزرگ‌تر است.



تذکر علامت $a \le b$، یعنی a کوچک‌تر یا مساوی b است.

خواص نامساوی‌ها

۱) اگر $a < b$ و $b < c$، آن‌گاه $a < c$.
۲) اگر $a < b$ و $c < d$، آن‌گاه $a + c < b + d$.
۳) اگر $a < b$ و c عددی حقیقی باشد، آن‌گاه $a + c < b + c$.
۴) اگر $a < b$ و $c > ۰$، آن‌گاه $ac < bc$.
۵) اگر $a < b$ و $c < ۰$، آن‌گاه $ac > bc$.
۶) اگر $a,b < ۰$ یا $a,b > ۰$، آن‌گاه $a < b \Leftrightarrow \frac{۱}{a} > \frac{۱}{b}$
۷) اگر a منفی و b مثبت باشد، آن‌گاه $a < b \Leftrightarrow \frac{۱}{a} < \frac{۱}{b}$
۸) اگر $a,b > ۰$، آن‌گاه $a < b \Leftrightarrow a^۲ < b^۲$

مثال ۷

اگر $a > b$، $a > c$ و $b^۲ + c^۲ = a^۲$، ثابت کنید که $a^۳ > b^۳ + c^۳$.

☑ پاسخ:

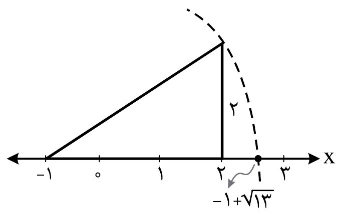
$$\begin{cases} a > b \xrightarrow[\text{(۴) خاصیت}]{\times b^۲ \text{طرفین}} ab^۲ > b^۳ \\ a > c \xrightarrow[\text{(۴) خاصیت}]{\times c^۲ \text{طرفین}} ac^۲ > c^۳ \end{cases} \xrightarrow{\text{(۲) خاصیت}} ab^۲ + ac^۲ > b^۳ + c^۳$$

$$\Rightarrow a(b^۲ + c^۲) > b^۳ + c^۳ \xrightarrow{b^۲ + c^۲ = a^۲} a^۳ > b^۳ + c^۳$$

۱- این گزاره را «اصل تثلیث» می‌نامند.

فصل ۰ پاسخ پرسش‌های

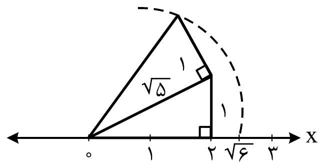
۱ داریم: $\sqrt{۱۳}=\sqrt{۳^۲+۲^۲}$، پس:



همچنین:

$$\sqrt{۵}=\sqrt{۲^۲+۱^۲}\ ,\ \sqrt{۶}=\sqrt{(\sqrt{۵})^۲+۱^۲}$$

پس:



---

۲ فرض خلف: فرض کنیم که $\sqrt{۷}$ عددی گویا باشد. پس اعداد صحیح $p,q\neq ۰$ وجود دارند که $\frac{p}{q}=\sqrt{۷}$، بنابراین:

$$\frac{p}{q}=\sqrt{۷}\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}\frac{p^۲}{q^۲}=۷\Rightarrow p^۲=۷q^۲\quad (*)$$

چون طرف راست تساوی عامل ۷ را داریم و p و q نسبت به هم اول هستند، پس $p^۲$ و از آنجا p مضربی از ۷ هستند.

پس $p=۷k,\ k\in\mathbb{Z}$ و بنابراین $p^۲=۴۹k^۲,\ k\in\mathbb{Z}$، با جایگذاری این رابطه در (*) داریم:

$$p^۲=۷q^۲\Rightarrow ۴۹k^۲=۷q^۲\Rightarrow ۷k^۲=q^۲\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

بنابراین $q^۲$ و از آنجا q نیز بر ۷ بخش‌پذیرند. پس p و q هر دو بر ۷ بخش‌پذیرند و این یک تناقض است (تناقض با این‌که p و q نسبت به هم اول هستند.) پس فرض خلف باطل است و $\sqrt{۷}$ عددی گنگ می‌باشد.

---

۳ برهان خلف: فرض کنیم که عدد $\log ۳$ گویا باشد. پس می‌توان آن را به صورت یک کسر تحویل‌ناپذیر نوشت:

$$\log ۳=\frac{a}{b}\ \ ,\ \ a,b\in\mathbb{Z}\ \ ,\ \ b\neq ۰\ \ ,\ \ (a,b)=۱$$

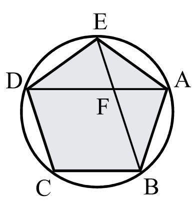
از طرفی $۱<۳$است، پس $\log ۳>۰$ می‌باشد و در واقع $a,b\in\mathbb{N}$ هستند. به کمک تعریف log داریم:

$$\log ۳=\frac{a}{b}\Rightarrow ۱۰^{\frac{a}{b}}=۳\xrightarrow{\text{طرفین به توان b}}(۱۰^{\frac{a}{b}})^b=۳^b\Rightarrow ۱۰^a=۳^b\qquad (*)$$

چون $a,b\in\mathbb{N}$ هستند، طرف چپ تساوی (*) مضرب ۱۰ است در حالی که در سمت راست تساوی عامل ۱۰ وجود ندارد و این تناقض است. پس فرض خلف باطل است و $\log ۳$ گویا نیست.

---

۴ چون پنج‌ضلعی منتظم است، دایره‌ای بر رئوس آن می‌گذرد (اصطلاحاً می‌گوییم پنج‌ضلعی در دایره محاط شده است.)



و طول هر یک از کمان‌های CD,CB,AB,EA و DE برابر $\frac{۳۶۰^\circ}{۵}$ می‌باشد و لذا طبق روابط زوایای محاطی داریم:

$$B\hat{E}A=E\hat{A}D=A\hat{B}E=\frac{۳۶۰^\circ}{۵}\times\frac{۱}{۲}=۳۶^\circ$$

پس دو مثلث FEA و ABE به حالت دو زاویه متشابه هستند. (این دو مثلث متساوی‌الساقین هستند.) از طرفی:

$$B\hat{F}A = F\hat{E}A + F\hat{A}E = ۷۲^\circ \quad , \quad D\hat{A}B = ۲\times ۳۶^\circ = ۷۲^\circ$$

در نتیجه مثلث FAB متساوی‌الساقین است و اگر طول پنج‌ضلعی را برابر با a در نظر بگیریم، داریم:

$$AB = BF = a$$

و هم‌چنین اگر قرار دهیم $EF = FA = x$، آن‌گاه با توجه به تشابه دو مثلث داریم:

$$\overset{\Delta}{FEA} \sim \overset{\Delta}{ABE} \Rightarrow \frac{EF}{AB} = \frac{EA}{EB} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{a}{a+x} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x^۲ + xa - a^۲ = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{حل معادله‌ی درجه‌ی دوم}} x = \frac{-۱\pm\sqrt{۵}}{۲}a \xrightarrow{x>۰} x = \frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}a \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} \frac{x+a}{a} = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲} \Rightarrow \frac{\text{طول قطر}}{\text{طول ضلع}} = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$$ عدد گنگ است.

---

۵ آ) برای اثبات تساوی $-(-x) = x$، کافی است نشان دهیم که $-(-x) + (-x) = ۰$ (زیرا طبق اصل ۵، اگر y قرینه‌ی x باشد، داریم $x + y = ۰$) پس:

$$-(-x)+(-x) = -(-x+x) = (-۱)(-x+x) \xlongequal{\text{توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع}} (-۱)(-x)+(-۱)x = x - x = ۰$$

ب)

$$x \xlongequal{\text{صفر عضو همانی است.}} x+۰ \xlongequal{y+(-y)=۰} x+(y+(-y)) \xlongequal{\text{خاصیت جابه‌جایی جمع}} x+((-y)+y)$$

$$\xlongequal{\text{شرکت‌پذیری جمع}} (x-y)+y \xlongequal{\text{طبق فرض}} ۰+y \xlongequal{\text{صفر عضو همانی است.}} y$$

---

۶ آ)

$$x(y-z) \xlongequal{\text{تعریف تفریق}} x(y+(-z)) \xlongequal{\text{توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع}} xy + x(-z) = xy + (-xz) = xy - xz$$

ب) باید نشان دهیم که $x = (x^{-۱})^{-۱}$.

$$x \xlongequal[\text{ضرب است.}]{\text{۱ عضو همانی}} ۱\times x = (\underbrace{(x^{-۱})^{-۱}(x^{-۱})}_{۱}).x \xlongequal[\text{عمل ضرب}]{\text{شرکت‌پذیری}} (x^{-۱})^{-۱}(x^{-۱})x \xlongequal{(x^{-۱})x=۱} (x^{-۱})^{-۱}\times ۱ \xlongequal[\text{ضرب است.}]{\text{۱ عضو همانی}} (x^{-۱})^{-۱}$$

---

۷ این گزاره دو شرطی است و برای اثبات داریم:

$(\Rightarrow)$ اگر $x = ۰$ یا $y = ۰$، آن‌گاه $xy = ۰$ (?)

اثبات: اگر $x = ۰$ باشد، پس می‌توان نوشت:

$$\underbrace{x+x}_{\text{۲ بار}} = ۰+۰ \xlongequal{\text{صفر عضو همانی جمع است.}} ۰ \Rightarrow ۲x = ۰$$

به همین ترتیب:

$$\underbrace{x+x+x}_{\text{۳ بار}} = ۰+۰+۰ \xlongequal{\text{صفر عضو همانی جمع است.}} ۰ \Rightarrow ۳x = ۰$$

پس:

$$\underbrace{x+x+\cdots+x}_{y\text{ بار}} = ۰+۰+\cdots+۰ \xlongequal{\text{صفر عضو همانی جمع است.}} ۰ \Rightarrow yx = ۰$$

و چون ضرب خاصیت جابه‌جایی دارد، داریم $xy = ۰$. بنابراین اگر $x = ۰$ آن‌گاه $xy = ۰$.

به همین ترتیب اگر $y = ۰$ ثابت می‌شود که $xy = ۰$ و لذا اگر $x = ۰$ یا $y = ۰$، آن‌گاه $xy = ۰$.

$(\Leftarrow)$ اگر $xy = ۰$، آن‌گاه $x = ۰$ یا $y = ۰$ (?)

اثبات: اگر $x = ۰$ باشد، مسأله ثابت می‌شود. اگر $x \neq ۰$ باشد، نشان می‌دهیم که $y = ۰$ است. چون $x \neq ۰$، پس $\frac{۱}{x}$ موجود است و داریم:

$$xy = ۰ \xrightarrow{\text{طرفین}\times\frac{۱}{x}} (xy)\frac{۱}{x} = ۰\times\frac{۱}{x} \xlongequal{\text{با توجه به قسمت قبل اثبات}} ۰ \Rightarrow (xy)\frac{۱}{x} = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{خاصیت جابه‌جایی ضرب}} (yx)\frac{۱}{x} = ۰ \xrightarrow{\text{خاصیت شرکت‌پذیری ضرب}} y(x\times\frac{۱}{x}) = ۰ \xrightarrow{\frac{۱}{x}\text{ وارون } x \text{ است.}} y\times ۱ = ۰ \xrightarrow{\text{۱ عضو همانی ضرب است.}} y = ۰$$

۸

آ) نادرست است. زیرا عدد $۰ \in \mathbb{R}$ وارون‌پذیر نیست.

ب) درست است.

پ) نادرست است. مجموعه‌ی اعداد گنگ نسبت به هیچ‌یک از این اعمال بسته نیست. (برای دیدن مثال‌های نقض به درسنامه رجوع کنید.)

ت) نادرست است. $\frac{۱}{۰}$ تعریف نشده است.

ث) نادرست است. هر عدد حقیقی با بسط اعشاری پایان‌ناپذیر و نامتناوب، اصم نامیده می‌شود.

ج) درست است. اعداد گنگ زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی هستند و همه‌ی اعداد حقیقی به جز عدد صفر وارون‌پذیر می‌باشند (و چون صفر عدد گنگ نیست) پس همه‌ی اعداد گنگ وارون‌پذیر هستند.

چ) نادرست است، اعداد $\sqrt{۳}^{\sqrt{۲}}$ و $\sqrt{۲}$ گنگ هستند اما $(\sqrt{۳}^{\sqrt{۲}})^{\sqrt{۲}} = (\sqrt{۳})^{\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}} = (\sqrt{۳})^{۲} = ۳ \in \mathbb{Q}$

۹

آ) $۱/۳۷۳ = \frac{۱۳۷۳}{۱۰۰۰}$

ب) $۱/\overline{۳۷۳} = ۱ + \frac{۳۷۳}{۹۹۹} = \frac{۱۳۷۲}{۹۹۹}$

پ) $۲/۴\bar{۷} = ۲ + \frac{۴۷-۴}{۹۰} = ۲ + \frac{۴۳}{۹۰} = \frac{۲۲۳}{۹۰}$

ت) $۳۰/۰\bar{۷} = ۳۰ + \frac{۷-۰}{۹۰} = \frac{۲۷۰۷}{۹۰}$

۱۰

آ) عبارت $\frac{\alpha^۳}{\beta}$ می‌تواند گنگ یا گویا باشد:

اگر $\alpha = \sqrt{۳}, \beta = \sqrt{۲} \Rightarrow \frac{\alpha^۳}{\beta} = \frac{۳\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}$ گنگ است.

اگر $\alpha = \beta = \sqrt{۲} \Rightarrow \frac{\alpha^۳}{\beta} = \frac{۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = ۲$ گویا است.

ب) طبق قضیه‌ی (۱)، اگر β گنگ باشد، $\frac{۱}{\beta}$ حتماً گنگ است. ($\frac{۱}{\beta}$، یعنی حاصل تقسیم عدد گویای ۱ بر عدد گنگ β، معکوس β است.)

پ) این عدد می‌تواند گنگ یا گویا باشد، زیرا داریم: $\beta^۲ - ۶\beta + ۱۰ = (\beta - ۳)^۲ + ۱$

پس:

$$\begin{cases} \text{اگر } \beta = \sqrt{۲} \Rightarrow \beta^۲ - ۶\beta + ۱۰ = (\sqrt{۲} - ۳)^۲ + ۱ \ \text{ گنگ است.} \\ \text{اگر } \beta = \sqrt{۲} + ۳ \Rightarrow \beta^۲ - ۶\beta + ۱۰ = (\sqrt{۲} + ۳ - ۳)^۲ + ۱ = ۲ + ۱ = ۳ \ \text{ گویا است.} \end{cases}$$

ت) این عدد می‌تواند گنگ یا گویا باشد، زیرا

$$\begin{cases} \text{اگر } \alpha = \sqrt{۲}, \beta = \sqrt{۳} \Rightarrow \alpha - \beta + \alpha\beta = \sqrt{۲} - \sqrt{۳} + \sqrt{۶} \ \text{ گنگ است.} \\ \text{اگر } \alpha = \beta = \sqrt{۲} \Rightarrow \alpha - \beta + \alpha\beta = \sqrt{۲} - \sqrt{۲} + \sqrt{۲} \times \sqrt{۲} = ۲ \ \text{ گویا است.} \end{cases}$$

ث) اگر β گنگ باشد، با توجه به قضیه‌ی (۱)، عدد $\frac{\beta - ۲}{۳}$ گنگ است.

۱۱

آ) داریم: $\frac{a\alpha^۲ + \alpha}{\alpha a} = \frac{a\alpha^۲}{\alpha a} + \frac{\alpha}{\alpha a} = \alpha + \frac{۱}{a}$

چون $\alpha \in \mathbb{Q}^c$، طبق قضیه‌ی (۱)، $\frac{a\alpha^۲ + \alpha}{\alpha a} = \alpha + \frac{۱}{a}$ الزاماً گنگ است.

ب) اگر $\alpha = -\sqrt{۳}$ باشد، داریم $a(\alpha + \sqrt{۳}) \Leftarrow a(\alpha + \sqrt{۳}) = a(-\sqrt{۳} + \sqrt{۳}) = ۰ \in \mathbb{Q}$ لزوماً گنگ نیست.

پ) اگر $\alpha = \sqrt{۲}$ باشد، $\alpha^۲ + a \Leftarrow \alpha^۲ + a = ۲ + a \in \mathbb{Q}$ الزاماً گنگ نیست.

ت) چون $a \in \mathbb{Q}, \alpha \in \mathbb{Q}^c$، طبق قضیه‌ی (۱)، $a + \alpha$ و لذا $\frac{۱}{a + \alpha}$ گنگ هستند.

۱۲

اگر a یک عدد منفی باشد، داریم:

$$a < ۰ \xrightarrow{\times \frac{۱}{a^۲} > ۰} \frac{۱}{a^۲} \times a < \frac{۱}{a^۲} \times ۰ \Rightarrow \frac{۱}{a} < ۰$$