فصل دوم: چند ویژگی ساده و چند رده‌ی خاص گراف‌ها

مرتبه، اندازه و درجه

☆۱ - با استقرا بر q، ثابت کنید: اگر $V=\{v_1, v_2, ..., v_p\}$ مجموعه‌ی رأس‌های گراف G با اندازه‌ی q باشد، آن‌گاه: $\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q$.
(هماهنگ کشوری ـ خرداد ۷۵)

☆۲ - ثابت کنید تعداد رئوس فرد هر گراف، زوج است؟ (هماهنگ کشوری ـ دی ۷۵)

۳ - گرافی تنها سه رأس زوج دارد و درجه‌ی آن‌ها ۴ می‌باشد. اندازه‌ی گراف ۲۰ است، مجموع درجات رئوس فرد را محاسبه کنید.

۴ - G، گرافی از مرتبه‌ی ۸ و اندازه‌ی ۱۱ می‌باشد و درجه‌ی هر رأس ۲ یا ۳ است. تعداد رأس‌های درجه‌ی ۳ را بیابید و سپس آن را رسم کنید.

۵ - در یک گراف ساده، دو رأس درجه‌ی ۴، سه رأس درجه‌ی ۳، سه رأس درجه‌ی ۲ و پنج رأس درجه‌ی ۱ داریم؛ تعداد یال‌های این گراف، چند تا است؟

☆۶ - فرض کنید G گرافی است از مرتبه‌ی ۷ و اندازه‌ی ۹، به‌طوری که درجه‌ی هر رأس آن ۲ یا ۳ می‌باشد. تعیین کنید این گراف چند رأس از درجه‌ی ۲ و چند رأس از درجه‌ی ۳ دارد؟ (هماهنگ کشوری ـ دی ۸۶)

☆۷ - الف) گرافی ارائه دهید که دنباله‌ی درجه‌ی رأس‌هایش $S: 3,3,3,3,2,2,2,0,0,0$ باشد.
ب) آیا پاسخ یکتاست؟ چرا؟

گراف‌های منتظم، کامل و تهی

۸ - الف) دو نوع گراف ۲ ـ منتظم از مرتبه‌ی ۶ رسم کنید.
ب) یک گراف ۳ ـ منتظم از مرتبه‌ی ۶، چند یال دارد.

☆۹ - گراف ساده‌ی G، چهار ـ منتظم از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q می‌باشد، به‌طوری که $p+q=21$ است؛
الف) p و q را محاسبه کنید.
ب) نمودار این گراف را رسم کنید.

☆۱۰ - چند گراف ۳ ـ منتظم مرتبه‌ی ۷ وجود دارد؟ چرا؟

۱۱ - گراف ساده‌ای داریم از مرتبه‌ی ۱۵ و اندازه‌ی ۲۷ که در آن درجه‌ی هر رأس ۳ یا ۴ است؛
الف) این گراف چند رأس با درجه‌ی ۳ دارد؟
ب) چند یال باید به آن اضافه کرد تا به‌گراف ۴ ـ منتظم تبدیل شود؟

۱۲ - چند گراف ۲ـ منتظم از مرتبه‌ی ۱۰ وجود دارد؟ آن‌ها را رسم کنید.

☆۱۳ - الف) گراف کامل را تعریف کنید.
ب) ثابت کنید تعداد یال‌های گراف کامل K_p برابر است با: $\frac{p(p-1)}{2}$

۱۴ - در یک گراف کامل، تعداد رأس‌ها $\frac{1}{3}$ تعداد یال‌ها است. مرتبه و اندازه‌ی این گراف را محاسبه کنید.

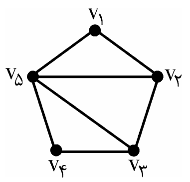
☆۱۵ - تعداد یال‌های گراف کامل مرتبه‌ی p، از تعداد یال‌های گراف کامل مرتبه‌ی $(p-2)$، ۱۳ واحد بیش‌تر است. p را پیدا کنید.

۱۶ - تعداد یال‌های یک گراف کامل از مرتبه‌ی $p-3$، از تعداد یال‌های یک گراف ۴ـ منتظم از مرتبه‌ی $p-2$، ۲ واحد کم‌تر است. p را بیابید.

۱۷ - گراف $G=(V,E)$ سه ـ منتظم است. با افزودن ۶ یال به یال‌های این گراف، گراف کامل به‌دست خواهد آمد؛

الف) مرتبه و اندازه‌ی گراف را به‌دست آورید.

ب) نموداری از این گراف رسم کنید.



۱۸☆ - نمودار مقابل مربوط به گراف $G(V,E)$ است:

الف) مجموعه‌ی رأس‌ها و یال‌های گراف را مشخص کنید.

ب) کدام یال‌ها را از گراف حذف کنیم تا گراف دو ـ منتظم حاصل شود.

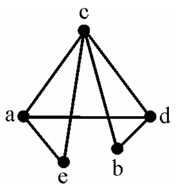
ج) چند یال به گراف اضافه کنیم تا گراف کامل از مرتبه‌ی ۵ به‌دست آید.

مسیر گراف و دور گراف

۱۹ - گراف $G=(V,E)$ با $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$، $E=\{v_1v_2, v_2v_5, v_1v_4, v_1v_5, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5\}$ را در نظر بگیرید:

الف) نمودار این گراف را رسم کنید.

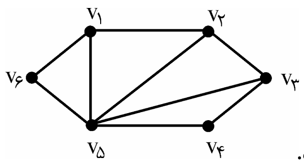
ب) ۴ مسیر از v_1 به v_3 بنویسید.



۲۰ - در گراف مقابل، تمام مسیرهای به طول ۳، از a به b را بنویسید.

۲۱☆ - در گراف کامل مرتبه‌ی ۵ با مجموعه رأس‌های $V=\{u,v,a,b,c\}$، چند مسیر متفاوت بین دو رأس u و v وجود دارد؟

۲۲ - تعداد مسیرهای به طول ۳، در گراف K_7 کدام است؟



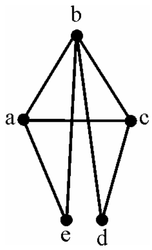
۲۳ - گراف G، به صورت مقابل رسم شده است:

الف) مجموعه‌های V و E را با اعضا مشخص کنید.

ب) درجه‌ی همه‌ی رأس‌های این گراف را به صورت دنباله‌ای نزولی بنویسید.

ج) یک مسیر از v_1 به v_4 با کوتاه‌ترین طول و هم‌چنین یک مسیر از v_1 به v_4 با بلندترین طول بنویسید.

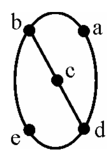
۲۴☆ - در یک گراف کامل مرتبه‌ی ۶، تعداد مسیرهای به طول ۲ را مشخص کنید.



۲۵☆ - در گراف مقابل، تمام دورها را بنویسید.

۲۶ - در گراف شکل زیر:

طولانی‌ترین مسیر از a به e و کلیه‌ی دورها به طول ۴ را بنویسید.

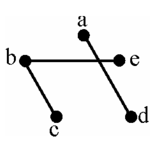


۲۷ - هفده نفر به سفر می‌روند و قبل از سفر قرار می‌گذارند هر کس به پنج نفر دیگر نامه بفرستد.

آیا امکان دارد هرکس به آن پنج نفری نامه بفرستد که از آن‌ها نامه دریافت می‌کند؟ چرا؟

۲۸☆ - الف) گراف G داده شده است. فرض کنید $u,v \in V(G)$ نشان دهید «وجود یک مسیر از u به v» یک رابطه‌ی هم ارزی بر مجموعه‌ی $V(G)$ است.

ب) افرازهای حاصل از رابطه‌ی هم ارزی مذکور در بند الف را برای گراف مقابل بیابید.



گراف همبند و گراف ناهمبند

۲۹☆ - گرافی ۳ـ منتظم با p رأس داریم به طوری که $q+4=2p$،

الف) p و q را به‌دست آورید.

ب) با این ویژگی‌ها، یک گراف همبند و یک گراف ناهمبند رسم کنید.

۳۰ - اگر تعداد رئوس یک گراف rـ منتظم برابر ۱۰ و نسبت اندازه به مرتبه‌ی آن $\frac{3}{2}$ باشد؛

الف) r را مشخص کنید.

ب) با این ویژگی، گراف ناهمبند رسم کنید.

گراف همیلتنی

۳۱☆ - گراف همیلتنی را تعریف کنید و یک گراف همیلتنی مرتبه‌ی ۴ رسم کنید.

۳۲ - گراف G، ۳ـ منتظم است و اندازه‌ی آن ۳ واحد کم‌تر از دو برابر مرتبه‌ی آن است؛

الف) مرتبه و اندازه‌ی گراف را به‌دست آورید.

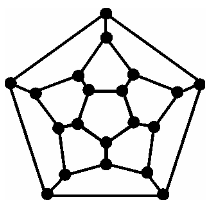
ب) گراف را رسم کنید.

ج) آیا این گراف همیلتنی است؟ چرا؟

۳۳☆ - الف) نشان دهید هر گراف همیلتنی، همبند است.

ب) اگر G همیلتنی باشد آن‌گاه به‌ازای هر $v \in V(G)$ داریم $\deg v \geq 2$.

ج) آیا گراف زیر گراف همیلتنی است؟ چرا؟



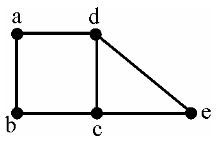
۳۴ - گراف مقابل را در نظر بگیرید:

الف) دنباله‌ی درجات رئوس گراف را بنویسید.

ب) دورهای گراف را نام ببرید.

ج) آیا این گراف، گراف بازه‌ها است؟ چرا؟

د) آیا گراف همیلتنی است؟ چرا؟



پاسخ پرسش‌های فصل دوم

ایستگاه نکته

چند ویژگی ساده و چند رده‌ی خاص گراف‌ها

- **مرتبه**
- **اندازه**
- **درجه/رأس زوج/رأس فرد/ Δ / δ / دنباله‌ی درجات**
- **قضیه‌ی $\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q$**
- **گراف منتظم / گراف کامل / گراف تهی**
- **مسیر / دور**
- **گراف همبند / گراف ناهمبند**
- **گراف همیلتنی**

مرتبه: تعداد رئوس (نقاط) گراف ساده‌ی G را مرتبه‌ی گراف G گویند و با p نمایش می‌دهند.

اندازه: تعداد یال‌های (خطها) گراف ساده‌ی G را اندازه‌ی گراف G گویند و با q نمایش می‌دهند.

درجه: تعداد یال‌های متصل به یک رأس v_i را درجه‌ی آن رأس گویند و با $\deg v_i$ نمایش می‌دهند.

رأس زوج: اگر درجه‌ی یک رأس عددی زوج باشد، آن رأس را رأس زوج می‌نامیم.

رأس فرد: اگر درجه‌ی یک رأس، عددی فرد باشد، آن رأس را رأس فرد نامیم.

ماکسیمم درجه‌ی G: بزرگ‌ترین عدد بین درجه‌های رأس‌های گراف G را ماکسیمم درجه‌ی G نامیده، آن را با Δ نمایش می‌دهیم.

می‌نیمم درجه‌ی G: کوچک‌ترین عدد بین درجه‌های رأس‌های گراف G را می‌نیمم درجه‌ی G نامیده، آن را با δ نمایش می‌دهیم.

دنباله‌ی درجه‌های رأس‌های گراف: اگر درجه‌های رأس‌های یک گراف ساده را به صورت دنباله‌ای نزولی بنویسیم، آن‌گاه آن دنباله را دنباله‌ی درجه‌ی رأس‌های آن گراف ساده گویند.

قضیه ۱: اگر $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ مجموعه‌ی رأس‌های گراف G با اندازه‌ی q باشد، آن‌گاه $\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q$

نتیجه‌ی قضیه ۱: تعداد رأس‌های فرد هر گراف، زوج است.

گراف r ـ منتظم: گراف G از مرتبه‌ی p را r- منتظم گویند، هرگاه درجه‌ی هر رأس G برابر با r باشد.

گراف کامل: هر گراف $(p-1)$–منتظم از مرتبه‌ی p را گراف کامل می‌نامیم و با K_p نمایش می‌دهیم.

به عبارت دیگر گراف G را کامل گویند، هرگاه هر دو رأس دلخواه آن مجاور باشند، یعنی همه‌ی یال‌های ممکن در آن رسم شده باشند.

تعداد یال‌های گراف کامل برابر است با: $q = \binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$

گراف تهی: گراف ۰- منتظم از مرتبه‌ی p را گراف تهی گویند و با $\overline{K}_p$ نمایش می‌دهند.
به عبارت دیگر گراف تهی، گرافی است که در آن هیچ یالی یافت نشود، یعنی درجه‌ی همه‌ی رأس‌ها، صفر باشد.
مسیر: در گراف ساده‌ی G، یک مسیر از رأس u به رأس v عبارت است از دنباله‌ای از رأس‌های آن گراف، به طوری که:
۱) شروع و پایان دنباله دو رأس u و v باشند.
۲) هر دو عضو متوالی آن دنباله، دو رأس مجاور از گراف G باشند.
۳) هیچ یک از رأس‌های گراف، بیش از یک بار در نوشتن دنباله به کار نرود.
طول مسیر: اگر مسیر شامل $m+1$ رأس باشد، طول مسیر برابر m می‌باشد.
دور: در گراف ساده‌ی G، یک دور از رأس u به رأس u عبارت است از دنباله‌ای از رأس‌های آن گراف، به طوری که:
۱) تعداد اعضای آن دنباله حداقل برابر ۴ باشد.
۲) شروع و پایان آن دنباله یکسان باشند.
۳) هر دو عضو متوالی آن دنباله، دو رأس مجاور از گراف G باشند.
۴) هیچ رأسی از گراف، بیش از یک بار در نوشتن آن دنباله به کار نرود. (به غیر از رأس شروع و پایان که دو بار نوشته می‌شود.)
طول دور: اگر دور شامل $m+1$ رأس باشد که m رأس آن متمایز است، طول دور برابر m می‌باشد.
گراف همبند: گراف ساده‌ی G را همبند گویند هرگاه بین هر دو رأس متمایز دلخواه از آن، حداقل یک مسیر موجود باشد.
گراف ناهمبند: گراف ساده‌ی G را که همبند نمی‌باشد، ناهمبند گویند.
گراف همیلتنی: گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی p را همیلتنی گویند، هرگاه دوری به طول p در آن یافت شود.

۱ استقرا بر q می‌باشد، پس ابتدا برای $q=1$ آن را ثابت کرده، سپس با فرض درستی آن به‌ازای $q=k$، درستی آن به‌ازای $q=k+1$ را ثابت می‌کنیم:

$P(1): q=1 \Rightarrow$ تنها یک یال وجود دارد $\Rightarrow$ این یال تنها بین دو رأس است، یعنی به شکل است.

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2 = 2q$ پس مجموع درجات برابر ۲ می‌باشد.

فرض استقرا: $P(k): q=k \Rightarrow \sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2k$

حکم استقرا: $P(k+1): q=k+1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2(k+1)$

باید از فرض استقرا استفاده کرده، به حکم استقرا برسیم:
در فرض استقرا گفته شده است که مجموع درجات یک گراف p رأسی با k یال برابر $2k$ است، حال فرض می‌کنیم یک یال به این گراف اضافه شود و یال‌ها از k به $(k+1)$ افزایش یابند، این یال جدید درجه‌ی دو رأس را هر کدام یک واحد افزایش خواهد داد بنابراین مجموع درجات از $2k$ به $2k+2$ افزایش می‌یابد، لذا $\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2(k+1)$ خواهد شد، که همان حکم استقرا می‌باشد، پس حکم استقرا با استفاده از فرض استقرا ثابت شد. بنابراین $\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q$ به ازای هر q برقرار است.

۲ مجموع درجات رأس‌های زوج را با A و مجموع درجات رأس‌های فرد را با B نشان می‌دهیم.
هر رأس یا فرد است و یا زوج و حالت سومی وجود ندارد پس $\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = A+B$. در این عبارت، مقدار A، حتماً عددی زوج است، چرا که جمع چند عدد زوج، زوج خواهد بود.
ضمناً طبق قضیه‌ی ۱ کتاب درسی، $\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q$ است، پس $\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = A+B = 2q$، لذا « $A+B=2q$ » عددی زوج است، A عددی زوج است، پس B نیز باید زوج باشد،
B مجموع چند عدد فرد است، جمع چند عدد فرد زمانی می‌تواند زوج باشد که تعداد آن اعداد فرد، زوج باشد، پس تعداد رأس‌های فرد هر گراف، زوج است.

۳ مجموع درجات رأس‌های زوج $= A$ و مجموع درجات رأس‌های فرد $= B$

$$\sum_{i=۱}^{p} \deg v_i = ۲q = A + B$$

$$\sum_{i=۱}^{p} \deg v_i = ۲(۲۰) = (۳\times۴) + B \Rightarrow B = ۴۰ - ۱۲ = ۲۸$$

۴ تعداد رأس‌های درجه‌ی ۲ را x و تعداد رأس‌های درجه‌ی ۳ را y در نظر می‌گیریم.

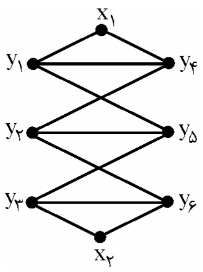
مرتبه‌ی گراف ۸ است، یعنی تعداد رأس‌ها ۸ است، پس: $x + y = ۸ \quad (۱)$

اندازه‌ی گراف ۱۱ است، یعنی تعداد یال‌ها ۱۱ است، پس: $\sum_{i=۱}^{۸} \deg v_i = ۲q = ۲۲ \Rightarrow ۲x + ۳y = ۲۲ \quad (۲)$

از معادله‌های (۱) و (۲) استفاده کرده، با حل یک دستگاه ۲ معادله ۲ مجهول، x و y به‌دست می‌آیند:

$$\begin{cases} x + y = ۸ \\ ۲x + ۳y = ۲۲ \end{cases} \Rightarrow x = ۲ \,,\ y = ۶$$

حال به رسم این گراف می‌پردازیم:



۵ باز هم از فرمول $\sum_{i=۱}^{p} \deg v_i = ۲q$، استفاده می‌کنیم:

$$\sum_{i=۱}^{۱۳} \deg v_i = (۲\times۴) + (۳\times۳) + (۳\times۲) + (۵\times۱) = ۲q \quad \Rightarrow \quad ۲q = ۲۸ \quad \Rightarrow \quad q = ۱۴$$

۶ تعداد رأس‌های درجه‌ی ۲ را x و تعداد رأس‌های درجه‌ی ۳ را y می‌نامیم، ضمناً $p = ۷$ و $q = ۹$ می‌باشد؛

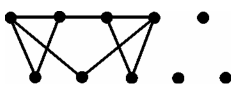
$$p = ۷ \Rightarrow x + y = ۷ \qquad (۱)$$

$$q = ۹ \xrightarrow[i=۱]{\sum^{p} \deg v_i = ۲q} ۲x + ۳y = ۱۸ \qquad (۲)$$

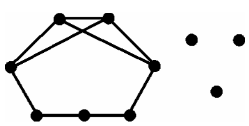
با استفاده از معادله‌های (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} x + y = ۷ \\ ۲x + ۳y = ۱۸ \end{cases} \Rightarrow x = ۳,\ y = ۴$$

۷ **الف)** گراف مورد نظر، گرافی است که ۱۰ رأس دارد (تعداد اعداد داده شده در دنباله‌ی S) و از این ۱۰ رأس، ۴ رأس درجه‌ی ۳، سه رأس درجه‌ی ۲ و سه رأس درجه‌ی ۰ می‌باشند، بنابراین می‌توان گرافی به شکل زیر رسم کرد:

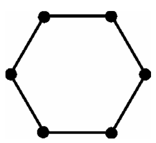


ب) خیر، زیرا می‌توان گراف دیگری با همین ویژگی‌ها رسم کرد که ریخت آن با گراف بالا متفاوت باشد:

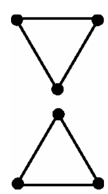


۸ **الف)**

۱:



۲:

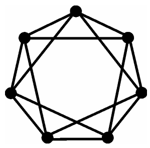


ب) گراف ۳ـ منتظم مرتبه‌ی ۶، گرافی است که ۶ رأس دارد و درجه‌ی همه‌ی رأس‌های آن ۳ می‌باشد،
به‌طور کلی در گراف r ـ منتظم مرتبه‌ی p رابطه‌ی $\boxed{r.p = ۲q}$ برقرار است.
لذا در مورد گراف ۳ـ منتظم مرتبه‌ی ۶ داریم: $۲q = ۶ \times ۳$ ، در نتیجه $\boxed{q = ۹}$

۹ **الف)** همان‌طور که می‌دانیم، در گراف r ـ منتظم مرتبه‌ی p، رابطه‌ی $r.p = ۲q$ برقرار است.
پس در این سؤال، در گراف ۴ـ منتظم مرتبه p، رابطه $۴ \times p = ۲q$ برقرار است.
ضمناً در این سؤال، رابطه‌ی $p + q = ۲۱$، بین p و q داده شده است، لذا دستگاه دو معادله دو مجهول زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} ۴p = ۲q \\ p + q = ۲۱ \end{cases} \Rightarrow \boxed{p = ۷} \ , \ \boxed{q = ۱۴}$$

ب) باید گرافی رسم کنیم که ۷ رأس دارد و درجه‌ی هر رأس آن ۴ می‌باشد:



۱۰ طبق نتیجه‌ی قضیه‌ی ۱ کتاب درسی، **تعداد رأس‌های فرد هر گراف، زوج است**.
لذا، هیچ گراف **فرد منتظم** مرتبه‌ی فردی وجود ندارد، چرا که در این صورت، تعداد رأس‌های فرد، فرد خواهد شد.
در مورد این سؤال نیز، هیچ گراف ۳ـ منتظم مرتبه‌ی ۷ وجود ندارد، زیرا گراف ۳ـ منتظم مرتبه‌ی ۷، گرافی است که ۷ رأس درجه‌ی ۳ داشته باشد که این غیرممکن است.

۱۱ **الف)** در این گراف $p_۱ = ۱۵$ و $q_۱ = ۲۷$ می‌باشد، تعداد رأس‌های درجه‌ی ۳ را x و تعداد رأس‌های درجه‌ی ۴ را y می‌نامیم.
طبق قضیه‌ی ۱ کتاب درسی، مجموع درجات هر گراف برابر ۲q است:

$$\sum_{i=۱}^{p} \deg v_i = ۲q$$

پس در این گراف داریم:

$$۳x + ۴y = ۲(۲۷) \quad (۱)$$

ضمناً این گراف، فقط رأس‌های درجه‌ی ۳ و ۴ دارد، بنابراین:

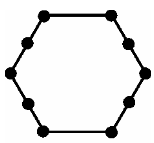
$$p = x + y = ۱۵ \quad (۲)$$

از معادله‌های (۱) و (۲) به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} ۳x + ۴y = ۵۴ \\ x + y = ۱۵ \end{cases} \Rightarrow x = ۶ \ , y = ۹$$

پس این گراف، ۶ رأس درجه‌ی ۳ دارد. $(x = ۶)$
ب) در گراف r ـ منتظم مرتبه‌ی p، رابطه‌ی $rp = ۲q$ برقرار است، پس درباره‌ی گراف ۴ـ منتظم مرتبه‌ی ۱۵ مربوط به این سؤال داریم:
$۴ \times ۱۵ = ۲q_۲$
(از $q_۲$ استفاده کرده‌ایم تا با قسمت الف اشتباه نشود)
لذا $q_۲ = ۳۰$ می‌باشد، در قسمت (الف)، $q_۱ = ۲۷$، را داشتیم، پس باید به این ۲۷ یال، ۳ یال را به شکل مناسب بیافزاییم (به رأس‌هایی که درجه‌ی ۳ بودند) تا گراف ۴ـ منتظم پدید آید.

۱۲ وقتی یک گراف ۲ـ منتظم می‌سازیم، محیط n ضلعی $(n \geq ۳)$ پدید می‌آید،
در مورد این سؤال، از آن‌جا که مرتبه‌ی گراف ۱۰ می‌باشد، ساده‌ترین و بدیهی‌ترین شکلی که به نظر می‌رسد، محیط یک ۱۰ضلعی است:

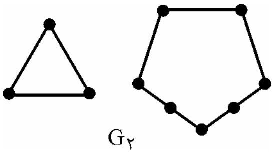


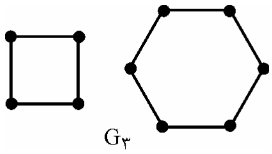
$G_۱$

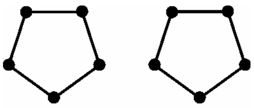
حال می‌توانیم این ۱۰ضلعی را به ۲ یا چند n ضلعی $(n \geq ۳)$ تقسیم کنیم:

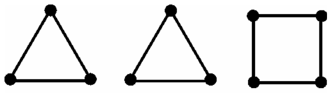
$۱۰ \Rightarrow ۳,۷$
$۱۰ \Rightarrow ۴,۶$
$۱۰ \Rightarrow ۵,۵$
$۱۰ \Rightarrow ۳,۳,۴$

لذا گراف‌های زیر را خواهیم داشت:


$G_۲$


$G_۳$


$G_۴$


$G_۵$

لذا ۵ گراف ۲ـ منتظم مرتبه‌ی ۱۰ وجود دارد.

البته توجه کنید که در این سؤال، فقط ریخت گراف‌ها را بررسی کردیم و نام‌گذاری رأس‌ها و برچسب‌گذاری آن‌ها مورد نظر نبود وگرنه تعداد به مراتب بیش‌تر می‌شد.

۱۳ **الف)** هر گراف $(p-۱)$ـ منتظم از مرتبه‌ی p را گراف کامل گویند و با K_p نمایش می‌دهند.

ب) گراف K_p گرافی است که p رأس داشته، درجه‌ی هر رأس آن $(p-۱)$ باشد،

بنابراین مجموع درجات رأس‌های این گراف، عبارت است از $\boxed{p(p-۱)}$، ضمناً طبق قضیه‌ی ۱ کتاب درسی: $\boxed{\sum_{i=۱}^{p} \deg v_i = ۲q}$

لذا در مورد K_p داریم: $\sum_{i=۱}^{p} \deg v_i = ۲q = p(p-۱)$

بنابراین : $q = \frac{p(p-۱)}{۲}$

۱۴ تعداد رأس‌ها، $\frac{۱}{۳}$ تعداد یال‌ها است، لذا: $p = \frac{۱}{۳}q \quad (۱)$

ضمناً در هر گراف کامل داریم: $q = \frac{p(p-۱)}{۲} \quad (۲)$

از (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} p = \frac{۱}{۳}q \\ q = \frac{p(p-۱)}{۲} \end{cases} \Rightarrow p = ۷ \,,\, q = ۲۱$$

۱۵ تعداد یال‌های گراف کامل مرتبه‌ی p، برابر است با: $\frac{p(p-۱)}{۲}$

تعداد یال‌های گراف کامل مرتبه‌ی $(p-۲)$، برابر است با: $\frac{(p-۲)(p-۳)}{۲}$

در سؤال، گفته شده است که تعداد یال‌های گراف کامل مرتبه‌ی p، از تعداد یال‌های گراف کامل مرتبه‌ی $(p-۲)$، ۱۳ واحد بیش‌تر است، لذا داریم:

$$\frac{p(p-۱)}{۲} - \frac{(p-۲)(p-۳)}{۲} = ۱۳$$

$$\Rightarrow p(p-۱) - (p-۲)(p-۳) = ۲۶ \Rightarrow p^۲ - p - (p^۲ - ۵p + ۶) = ۲۶ \Rightarrow p = ۸$$

۱۶ تعداد یال‌های گراف کامل مرتبه‌ی $(p-۳)$، برابر است با: $\frac{(p-۳)(p-۴)}{۲}$

تعداد یال‌های گراف ۴ـ منتظم مرتبه‌ی $(p-۲)$، برابر است با: $\frac{۴(p-۲)}{۲}$

در سؤال گفته شده است که تعداد یال‌های گراف کامل مرتبه‌ی $p-۳$ از تعداد یال‌های گراف ۴ـ منتظم مرتبه‌ی $p-۲$، ۲ واحد کم‌تر است، بنابراین داریم:

$$\frac{(p-۳)(p-۴)}{۲} + ۲ = \frac{۴(p-۲)}{۲}$$

$$\Rightarrow (p-۳)(p-۴) + ۴ = ۴(p-۲)$$

$$\Rightarrow p^۲ - ۷p + ۱۲ + ۴ = ۴p - ۸ \Rightarrow \begin{cases} p = ۳ \text{ غیرقابل‌قبول است، چرا که اگر } p = ۳ \text{ باشد، گراف ۴ـ منتظم مرتبه‌ی } p-۲\text{،} \\ \text{تبدیل به گراف ۴ـ منتظم مرتبه‌ی ۱ می‌شود، که نشدنی است.} \\ p = ۸ \text{ قابل قبول} \end{cases}$$

۱۷ **الف)** گراف G، سه ـ منتظم است، لذا تعداد یال‌های آن برابر است با: $\frac{rp}{۲}=\frac{۳p}{۲}$

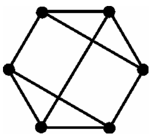
ضمناً در گراف کامل مرتبه‌ی p، تعداد یال‌ها برابر است با: $\frac{p(p-۱)}{۲}$

در سؤال، گفته شده است که اگر ۶ یال به یال‌های گراف ۳ـ منتظم اضافه کنیم، گراف کامل به‌دست می‌آید، پس داریم:

$$\frac{۳p}{۲}+۶=\frac{p(p-۱)}{۲} \Rightarrow ۳p+۱۲=p(p-۱) \Rightarrow \begin{cases} p=-۲ & \text{غیر قابل قبول} \\ p=۶ & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

بنابراین، گراف، گرافی ۳ـ منتظم از مرتبه‌ی ۶ است، لذا تعداد یال‌های آن برابر است با: $q=\frac{rp}{۲}=\frac{۳\times۶}{۲}=۹$

ب) گراف G، ۳ ـ منتظم از مرتبه‌ی ۶ است، پس گرافی رسم می‌کنیم که ۶ رأس داشته و درجه‌ی هر رأس آن ۳ است:



۱۸ **الف)**

$V=\{v_۱, v_۲, v_۳, v_۴, v_۵\}=$ مجموعه‌ی رأس‌ها

$E=\{v_۱v_۵, v_۲v_۵, v_۳v_۵, v_۴v_۵, v_۱v_۲, v_۲v_۳, v_۳v_۴\}=$ مجموعه‌ی یال‌ها

ب) در حال حاضر، درجه‌ی رأس‌های $v_۱$ و $v_۴$، ۲ است و درجه‌ی رأس‌های $v_۲$ و $v_۳$، ۳ می‌باشد.

ضمناً درجه‌ی رأس $v_۵$، ۴ می‌باشد.

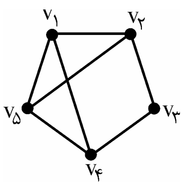
باید درجه‌ی رأس‌های $v_۲$ و $v_۳$ را ۱ واحد کاهش دهیم و درجه‌ی رأس $v_۵$ را ۲ واحد کاهش دهیم.

پس یال‌های $v_۲v_۵$ و $v_۳v_۵$ را حذف می‌کنیم تا این موضوع تحقق یابد.

ج) تعداد یال‌های گراف کامل مرتبه‌ی ۵، برابر است با: $q=\frac{p(p-۱)}{۲}=\frac{۵(۴)}{۲}=۱۰$

در حال حاضر، گراف G، ۷ یال دارد، پس باید ۳ یال به آن افزوده شود تا ۱۰ یال پیدا کند و گراف کامل شود.

۱۹ **الف)** رأس‌های $v_۱$، $v_۲$، $v_۳$، $v_۴$ و $v_۵$ را رسم کرده، یال‌هایی که بین رأس‌ها وجود دارد، رسم می‌کنیم:



ب) برای نوشتن مسیر از $v_۱$ به $v_۳$، باید مسیرهایی را بیابیم که از $v_۱$ شروع شده و به $v_۳$ ختم می‌شوند:

مسیر (۱) : $v_۱, v_۲, v_۳$

مسیر (۲) : $v_۱, v_۴, v_۳$

مسیر (۳) : $v_۱, v_۵, v_۴, v_۳$

مسیر (۴) : $v_۱, v_۴, v_۵, v_۲, v_۳$

۲۰ باید مسیرهایی را مشخص کنیم که از a شروع شده به b ختم می‌شود:

مسیر (۱) : a, e, c, b

مسیر (۲) : a, c, d, b

مسیر (۳) : a, d, c, b

۲۱ ابتدا تعداد مسیرهایی به طول $m\,(m\geq ۱)$ بین دو رأس u و v درگراف K_p را می‌یابیم:

از آن‌جا که ابتدا و انتهای مسیر مشخص شده است، پس فقط باید رأس‌هایی را که بین این دو رأس قرار می‌گیرند، انتخاب کنیم. برای این‌که مسیری به طول m داشته باشیم، باید $(m-۱)$ رأس بین u و v قرار دهیم. از بین p رأس گراف K_p، دو رأس u و v برای ابتدا و انتهای مسیر انتخاب شده‌اند، پس $(p-۲)$ رأس باقی مانده است که باید $(m-۱)$ رأس از بین آن‌ها انتخاب کنیم که این کار به $\binom{p-۲}{m-۱}$ روش امکان‌پذیر است.

حال $(m-۱)$ رأس انتخاب شده را باید بین u و v بچینیم (ترتیب رأس‌ها اهمیت دارد).

چیدمان $(m-۱)$ رأس به $(m-۱)!$ طریق امکان‌پذیر است.

بنابراین تعداد مسیرها به طول m بین u و v در K_p برابر است با: $\binom{p-۲}{m-۱}(m-۱)!$

حال در این سؤال، باید تعداد مسیرهای بین u و v در گراف K_5 را پیدا کنیم؛
بین u و v می‌توانیم مسیرهایی به طول ۱، ۲، ۳ و ۴ داشته باشیم:

$$\left.\begin{array}{l} \text{تعداد مسیرهای به طول ۱ بین u و v} = \binom{3}{0}0! = 1 \\ \text{تعداد مسیرهای به طول ۲ بین u و v} = \binom{3}{1}1! = 3 \\ \text{تعداد مسیرهای به طول ۳ بین u و v} = \binom{3}{2}2! = 6 \\ \text{تعداد مسیرهای به طول ۴ بین u و v} = \binom{3}{3}3! = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{تعداد مسیرها به طول متفاوت بین u و v} = 1+3+6+6 = 16$$

۲۲ ابتدا در حالت کلی به محاسبه‌ی تعداد مسیرهای به طول m در گراف K_p می‌پردازیم:

از آن‌جا که ابتدا و انتهای مسیر معین نشده است، ابتدا دو رأس را به‌عنوان ابتدا و انتها انتخاب می‌کنیم که این کار به $\binom{p}{2}$ طریق امکان‌پذیر است.

حال باید بین این دو رأس ابتدا و انتها، $(m-1)$ رأس قرار دهیم تا مسیری به طول m ساخته شود، با توجه به این‌که ۲ رأس قبلاً انتخاب شده است، $(p-2)$ رأس باقی مانده است، پس باید $(m-1)$ رأس را از بین این رأس‌ها انتخاب کنیم، که این به $\binom{p-2}{m-1}$ روش امکان‌پذیر است، حال باید این $(m-1)$ رأس را بین ابتدا و انتهای مسیر مرتب کنیم، چرا که در مسیر ترتیب رأس‌ها اهمیت دارد، جایگشت‌های $(m-1)$ رأس برابر است با $(m-1)!$.

پس به طور کلی تعداد مسیرهای به طول m در K_p، برابر است با:

$$\binom{p}{2}\binom{p-2}{m-1}(m-1)!$$

در مورد این سؤال، تعداد مسیرهای به طول ۳ در K_7، برابر است با:

$$\binom{7}{2}\binom{7-2}{3-1}(3-1)! = 21\times 10\times 2 = 420$$

۲۳ **الف)**

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

$$E = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_1, v_1v_5, v_2v_5, v_3v_5\}$$

ب) $S: 5, 3, 3, 3, 2, 2$

ج) مسیر از v_1 به v_4 با کوتاه‌ترین طول: v_1, v_5, v_4

مسیر از v_1 به v_4 با بلندترین طول: $v_1, v_6, v_5, v_2, v_3, v_4$

۲۴ ابتدا باید رأس‌های ابتدا و انتها را پیدا کنیم که این‌کار به $\binom{6}{2}$ طریق امکان‌پذیر است،

حالا برای این‌که مسیری به طول ۲ داشته باشیم باید از بین ۴ رأس باقی‌مانده ۱ رأس انتخاب کنیم تا بین رأس ابتدا و انتها قرار دهیم.
این کار به $\binom{4}{1}$ روش، انجام پذیر است، پس کل مسیرهای به طول ۲ برابر است با:

$$\binom{6}{2}\binom{4}{1} = 60$$

۲۵ دورهای به طول ۳، ۴ و ۵ را می‌نویسیم:

$$\text{دور به طول ۳}: \begin{cases} a, b, c, a \\ b, c, d, b \\ b, a, e, b \end{cases}$$

$$\text{دور به طول ۴}: \begin{cases} a, e, b, c, a \\ a, c, d, b, a \end{cases}$$

$$\text{دور به طول ۵}: \begin{cases} a, e, b, d, c, a \\ c, d, b, e, a, c \end{cases}$$

۲۶ a, b, c, d, e : طولانی‌ترین مسیر از a به e

$$\begin{cases} a, b, e, d, a \\ c, b, e, d, c \\ c, b, a, d, c \end{cases}$$: دورهای به طول ۴

۲۷ می‌توان این سؤال را به‌صورت یک گراف مدل سازی نمود، به این ترتیب که هر نفر را یک رأس در نظر گرفت و فرستادن و دریافت نامه بین دو نفر را مترادف با وجود یال بین آن دو نفر (دو رأس) لحاظ نمود. اگر قرار باشد هرکس به همان پنج نفری نامه بفرستد که از آن‌ها نامه دریافت می‌کند، درجه‌ی هر رأس دقیقاً ۵ خواهد بود.
بنابراین، گرافی خواهیم داشت با ۱۷ رأس که درجه‌ی هر رأس ۵ می‌باشد. چنین چیزی امکان‌پذیر نیست،
زیرا طبق نتیجه‌ی قضیه‌ی (۱) کتاب درسی، تعداد رأس‌های فرد هر گراف، زوج است.

۲۸ **الف)** برای اثبات خاصیت هم ارزی باید سه خاصیت بازتابی، تقارنی وتراگذری را اثبات کنیم:

(۱) بازتابی : $\forall u \in V(G) \Rightarrow u \ R \ u$

می‌دانیم که بین هر رأس و خودش یک مسیر به‌صورت u,u به طول صفر وجود دارد، پس از هر رأس به خودش مسیری وجود دارد، لذا $u R u$، پس خاصیت بازتابی برقرار است.

(۲) تقارنی : $\forall u, v \in V(G) : u R v \Rightarrow v R u$

اگر از u به v مسیری وجود داشته باشند، می‌توانیم آن مسیر را برعکس طی کرده، از v به u برسیم، لذا vRu، پس ثابت کردیم که خاصیت تقارنی نیز برقرار است.

(۳) تراگذری : $\forall u, v, w \in V(G) : uRv \ , \ vRw \Rightarrow uRw$

اگر یک مسیر از u به v و یک مسیر از v به w موجود باشد، می‌توانیم از u به v رفته، سپس از v به w برویم، پس مسیری از u به w وجود دارد، بنابراین uRw، لذا خاصیت تراگذری نیز برقرار است.
از آن‌جا که نشان دادیم هر سه خاصیت بازتابی، تقارنی و تراگذری برقرار است، پس خاصیت هم‌ارزی وجود دارد.

ب) هر رابطه‌ی هم‌ارزی روی یک مجموعه، آن مجموعه را به کلاس‌های هم ارزی افراز می‌کند:

کلاس هم ارزی عنصر u $= [u] = \{ v \in V(G) |$ از u به v حداقل یک مسیر وجود دارد $\}$

در مورد رابطه‌ی هم‌ارزی وجود مسیر بین دو رأس، کلاس‌های هم ارزی همان بخش‌های گراف هستند. در مورد گراف داده شده، با یک گراف ۲ بخشی مواجه هستیم، پس دو کلاس هم ارزی به‌صورت زیر داریم:

$$[a] = \{ v \in V(G) | vRa \} = \{ a, d \}$$
$$[b] = \{ v \in V(G) | uRb \} = \{ b, c, e \}$$

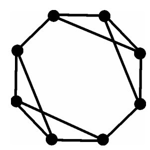
۲۹ **الف)** در گراف rـ منتظم مرتبه‌ی p، داریم: $q = \frac{rp}{۲}$، پس در گراف ۳ـ منتظم مرتبه p، خواهیم داشت: $q = \frac{۳p}{۲}$ (۱)

ضمناً، در صورت سؤال، گفته شده است: $q + ۴ = ۲p$ (۲)

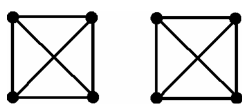
از (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} q = \frac{۳p}{۲} \\ q + ۴ = ۲p \end{cases} \Rightarrow p = ۸ \ , \ q = ۱۲$$

ب)



گراف همبند ۳ـ منتظم مرتبه‌ی ۸



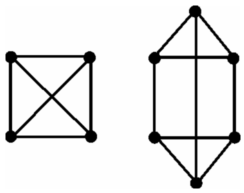
گراف ناهمبند ۳ـ منتظم مرتبه‌ی ۸

۳۰ **الف)**

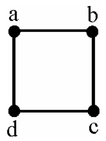
$$\begin{cases} p = ۱۰ \\ \frac{q}{p} = \frac{۳}{۲} \end{cases} \Rightarrow q = ۱۵$$

ضمناً در گراف rـ منتظم مرتبه‌ی p، داریم: $q = \frac{rp}{۲}$، پس در این گراف خواهیم داشت: $۱۵ = \frac{r \times ۱۰}{۲}$، لذا $\boxed{r = ۳}$

ب) گراف ناهمبند ۳ـ منتظم مرتبه‌ی ۱۰، می‌تواند به شکل مقابل باشد:



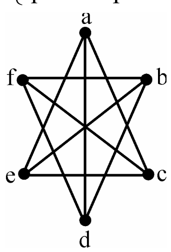
۳۱ گراف G از مرتبه‌ی $p(p \geq ۳)$ که دوری از مرتبه‌ی p، داشته باشد، گراف همیلتنی نام دارد.
گراف روبه‌رو، گراف همیلتنی از مرتبه‌ی ۴ است چرا که دور abcda به طول ۴ در آن وجود دارد.



۳۲ **الف)** در گراف ۳ـ منتظم مرتبه‌ی p، $۲q = ۳p$ (۱) خواهد بود.
ضمناً اندازه‌ی آن، ۳ واحد کم‌تر از ۲ برابر مرتبه است، پس: $q + ۳ = ۲p$ (۲)
از (۱) و (۲) داریم:

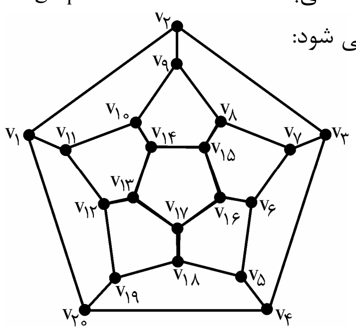
$$\begin{cases} ۲q = ۳p \\ q + ۳ = ۲p \end{cases} \Rightarrow p = ۶ , q = ۹$$

ب) گرافی ۳ـ منتظم از مرتبه‌ی ۶ رسم می‌کنیم:



ج) بله؛ زیرا گراف همیلتنی از مرتبه‌ی p، گرافی است که دور به طول p داشته باشد و این گراف که گرافی از مرتبه‌ی ۶ است، دور به طول ۶ دارد: acebfda

۳۳ **الف)** گراف همیلتنی از مرتبه‌ی p، گرافی است که دوری به طول p دارد، پس این دور از همه‌ی رأس‌ها می‌گذرد، لذا همه‌ی رأس‌ها به هم وصل هستند و بین هر دو رأس گراف، مسیری وجود دارد، پس گراف همیلتنی، همبند است.
ب) از آن‌جا که G گرافی همیلتنی است، پس دارای دوری به طول p است که از همه‌ی رأس‌ها می‌گذرد، لذا در طی این دور، به هر رأس توسط یک یال وارد شده و توسط یال دیگر خارج می‌شویم، پس درجه‌ی هر رأس حداقل ۲ می‌باشد: $\deg v_i \geq ۲$
ج) این گراف، از مرتبه‌ی ۲۰ می‌باشد، پس باید دوری به طول ۲۰ در آن بیابیم تا گراف همیلتنی شود:
اگر مطابق نام‌گذاری که در زیر شده است از رأس $v_۱$ به $v_۲$،
از رأس $v_۲$ به رأس $v_۳$ و ... از رأس $v_{۱۹}$ به رأس $v_{۲۰}$
برویم و از رأس $v_{۲۰}$ به رأس $v_۱$ برگردیم،
دوری به طول ۲۰ را پیموده‌ایم.



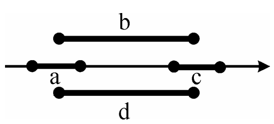
۳۴ **الف)** $S = ۳,۳,۲,۲,۲$

ب) d,e,c,d

d,a,b,c,d

a,d,e,c,b,a

ج) خیر؛ زیرا بازه‌های a و c با هم اشتراک ندارند و بازه‌های b و d با هر دو بازه‌ی a و c اشتراک دارند، که اگر این مطلب را روی محور نمایش دهیم، خواهیم داشت:



ملاحظه می‌شود که بازه‌های b و d باید با هم اشتراک داشته باشند،
حال آن‌که در گراف به هم وصل نیستند، پس این گراف، گراف بازه‌ها نیست.
د) بله؛ زیرا این گراف، گرافی از مرتبه‌ی ۵ است و دوری به طول ۵ دارد: abceda.