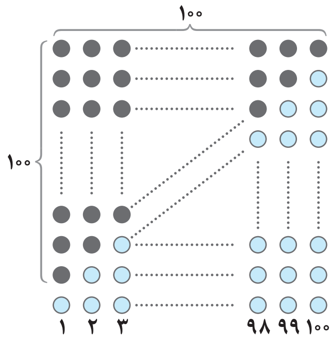
فصل اول
محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات

بحث در کلاس
صفحه‌ی ۲

از شکل مقابل چگونه می‌توان استفاده کرد و جمع اعداد از ۱ تا ۱۰۰ را به‌دست آورد؟



مجموع دایره‌های سبز در هر ستون: $۱+۲+۳+\cdots+۱۰۰$

مجموع دایره‌های سیاه در هر ستون: $۱۰۰+۹۹+۹۸+\cdots+۱$

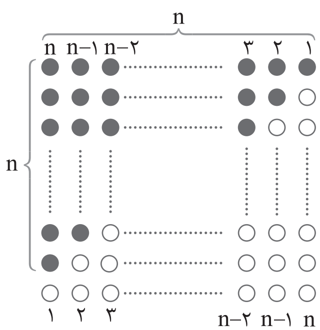
جمع کل: $\underbrace{(۱+۱۰۰)}_{۱۰۱}+\underbrace{(۲+۹۹)}_{۱۰۱}+\underbrace{(۳+۹۸)}_{۱۰۱}+\cdots+\underbrace{(۱۰۰+۱)}_{۱۰۱}$

$$=۱۰۰\times۱۰۱ \xRightarrow[\text{به‌کار برده شده است.}]{\text{اعداد ۱ تا ۱۰۰ دوبار}} ۱+۲+۳+\cdots+۱۰۰=\frac{۱۰۰\times۱۰۱}{۲}=۵۰۵۰$$

تمرین در کلاس
صفحه‌ی ۲

۱– با استفاده از تجربیاتی که در بالا به‌دست آورده‌اید، برای یک عدد طبیعی n نشان دهید:

$$۱+۲+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$



مجموع دایره‌های سفید در هر ستون: $۱+۲+۳+\cdots+n$

مجموع دایره‌های سیاه در هر ستون: $n+(n-۱)+(n-۲)+\cdots+۱$

جمع کل: $\underbrace{(۱+n)}_{n+۱}+\underbrace{(۲+n-۱)}_{n+۱}+\cdots+\underbrace{(n+۱)}_{n+۱}=n(n+۱)$

$$\xRightarrow[\text{به‌کار برده شده است.}]{\text{اعداد ۱ تا n دوبار}} ۱+۲+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

۲– اگر جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی a و قدر نسبت آن d باشد، جملات آن به شکل: $a, a+d, a+۲d, \ldots, a+nd, \ldots$ هستند.

نشان دهید مجموع n جمله‌ی اول این دنباله برابر است با $\frac{n}{۲}(۲a+(n-۱)d)$.

مجموع n جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی را با S_n نمایش می‌دهیم، داریم:

$$S_n=a_۱+a_۲+a_۳+\ldots+a_n \xRightarrow{\text{طبق فرض}} S_n=a+(a+d)+(a+۲d)+\ldots+(a+(n-۱)d)$$

$$\Rightarrow S_n=\underbrace{a+a+a+\ldots+a}_{\text{n تا}}+d(۱+۲+\ldots+(n-۱))=na+\frac{d(n-۱)(n-۱+۱)}{۲}=na+\frac{n(n-۱)d}{۲}=\frac{n}{۲}[۲a+(n-۱)d]$$

۳– نشان دهید $۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)=n^۲$.

طبق فرض مسئله $a=۱$ و $d=۲$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$S_n=\frac{n}{۲}[۲a+(n-۱)d]=\frac{n}{۲}[۲\times۱+(n-۱)\times۲]=\frac{n}{۲}(۲+۲n-۲)=\frac{n}{۲}\times۲n \Rightarrow S_n=n^۲$$

◆ بحث در کلاس

صفحه‌ی ۳

می‌گویند یک روز حاکم شهری خواست به مخترع شطرنج جایزه‌ای بدهد و از او خواست خودش جایزه‌ای برای خودش تعیین کند. شطرنج ۶۴ خانه دارد و مخترع شطرنج گفت در خانه‌ی اول یک دانه گندم بگذارید و در خانه‌ی دوم ۲ گندم بگذارید و در خانه سوم ۴ گندم بگذارید و به همین ترتیب، در هر خانه دو برابر خانه‌ی قبل گندم بگذارید و نهایتاً کل گندم‌ها را به من بدهید. اگر هر دانه گندم یک گرم باشد، چند گرم گندم جایزه مخترع شطرنج خواهد شد؟

شماره خانه‌ی شطرنج	۱	۲	۳	۴	...	۶۴
تعداد گندم‌ها در هر خانه	$1=2^0$	$2=2^1$	$4=2^2$	$8=2^3$	...	2^{63}

$$\begin{cases} S=1+2+4+\cdots+2^{63} \\ 2S=2+4+8+\cdots+2^{64} \end{cases} \Rightarrow 2S-S=\cancel{2}+\cancel{4}+\cancel{8}+\cdots+2^{64}-1-\cancel{2}-\cancel{4}-\cdots-\cancel{2^{63}}=2^{64}-1 \Rightarrow S=2^{64}-1$$

کل گندم‌ها $2^{64}-1$ دانه می‌باشد. از آن‌جایی‌که هر دانه گندم ۱ گرم است، پس مخترع شطرنج $(2^{64}-1)\times 1=2^{64}-1$ گرم گندم جایزه گرفته است.

◆ فعالیت ۱

صفحه‌ی ۴

۱– برای یک عدد طبیعی n و یک عدد حقیقی q قرار دهید $S=1+q+q^2+\cdots+q^n$. با مقایسه‌ی S و qS نتیجه بگیرید:

$$\mathbf{(1-q)S=1-q^{n+1}}$$

طبق فرض: $S=1+q+q^2+\cdots+q^n \Rightarrow qS=q+q^2+q^3+\cdots+q^{n+1}$

$$S-qS=1+q+q^2+\cdots+q^n-q-q^2-q^3-\cdots-q^{n+1}=1-q^{n+1} \Rightarrow (1-q)S=1-q^{n+1}$$

۲– اگر $q\neq 1$ نشان دهید:

$$\mathbf{1+q+q^2+\cdots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

چون $q\neq 1$ است، دو طرف رابطه‌ی بالا را بر $(1-q)$ تقسیم می‌کنیم، در نتیجه داریم:

$$\frac{(1-q)S}{1-q}=\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \Rightarrow S=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

تذکر **اگر $q=1$ باشد، در نتیجه $1-q=0$ است و کسر تعریف نشده می‌شود.**

۳– اگر جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی برابر a و قدر نسبت آن برابر q باشد، جملات این دنباله به شکل زیرند.

$$\mathbf{a\,,\,aq\,,\,aq^2,\ldots,aq^n,\ldots}$$

نشان دهید در حالت $q\neq 1$ مجموع n جمله‌ی اول این دنباله برابر است با $a\dfrac{1-q^n}{1-q}$.

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1} \xrightarrow{\times q} qS_n=aq+aq^2+aq^3+\cdots+aq^n$$

$$S_n-qS_n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}-aq-aq^2-aq^3-\cdots-aq^n$$

$$\Rightarrow (1-q)S_n=a(1-q^n) \xrightarrow{q\neq 1} S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

۴- در حالت $|q|<۱$، مجموع n جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی بالا با افزایش n به چه عددی نزدیک می‌شود؟ از آن‌جایی که $|q|<۱$ است، با افزایش n مقدار q^n کوچک می‌شود تا به صفر برسد، در نتیجه داریم:

$$S_n=\frac{a(۱-q^n)}{۱-q}\xrightarrow{q^n\to ۰}S_n=\frac{a}{۱-q}$$

◆ مسائل

صفحه‌ی ۵ و ۶

۱- در دنباله‌ی حسابی ... , ۱۱ , ۸ , ۵ حداقل چند جمله‌ی آن را باید جمع کنیم تا حاصل از ۵۰۰ بیش‌تر شود؟

در دنباله‌ی داده شده $a_۱=۵$ و $d=۸-۵=۳$ است، بنابراین داریم:

$$S_n=\frac{n}{۲}[۲a_۱+(n-۱)d]=a_۱n+\frac{n(n-۱)}{۲}d=۵n+\frac{n^۲-n}{۲}\times ۳>۵۰۰\xrightarrow[\text{۲ ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین را در عدد}}۱۰n+۳n^۲-۳n>۱۰۰۰\Rightarrow ۳n^۲+۷n-۱۰۰۰>۰$$

$$\Delta=b^۲-۴ac=(۷)^۲+۴\times۳\times۱۰۰۰=۴۹+۱۲۰۰۰=۱۲۰۴۹$$

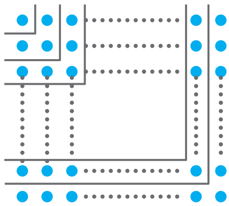
$$x_۱=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۷+۱۰۹/۷}{۶}=۱۷/۱ \quad ، \quad x_۲=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۷-۱۰۹/۷}{۶}=-۱۹/۴$$

n		$-۱۹/۴$		$۱۷/۱$	
$۳n^۲+۷n-۱۰۰۰$	+	۰	−	۰	+

$\Rightarrow$ مجموعه‌ی جواب $=\{n\,|\,n<-۱۹/۴\,,\,n>۱۷/۱\}$

بنابراین باید حداقل ۱۸ جمله را جمع کنیم.

۲- به کمک شکل زیر، نتیجه بگیرید $۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)=n^۲$.



در ناحیه‌ی اول ۱ دایره، در ناحیه‌ی دوم ۳ دایره و به همین ترتیب، در ناحیه‌ی n ام، $۲n-۱$ دایره وجود دارد. از طرفی تعداد دایره‌های کوچک برابر مساحت مربع، یعنی $n^۲$ است، پس داریم:

تعداد دایره‌ها: $۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)=n^۲$

۳- در مسئله‌ی شطرنج نشان دهید جایزه‌ی مخترع شطرنج بیش از ۱۰۰۰ میلیارد تن گندم خواهد شد.

تعداد دانه‌های گندم $۲^{۶۴}-۱$ است، بنابراین:

$$۲^{۶۴}-۱>۲^{۶۳}=(۲^۷)^۹>۱۰۰^۹=۱۰^{۱۸}$$

$۱۰^{۱۸}$ گرم برابر است با $۱۰^{۱۲}$ تن که ۱۰۰۰ میلیارد تن می‌باشد. بنابراین جایزه‌ی مخترع شطرنج بیش از ۱۰۰۰ میلیارد تن گندم خواهد شد.

۴- علی می‌خواهد پول‌های خود را پس‌انداز کند. او روز اول ۱۰۰۰ تومان در صندوق خود قرار می‌دهد و قرار می‌گذارد هر روز ۰/۹ پول واریزی در روز قبل را در صندوق قرار دهد. پس از ۵۰ روز، او چه‌قدر پول در صندوق خواهد داشت؟ نشان دهید پول صندوق او هیچ‌گاه از ۱۰۰۰۰ تومان بیش‌تر نخواهد شد.

شماره‌ی روز	۱	۲	۳	...
مقدار پول پس‌انداز (تومان)	۱۰۰۰	$۱۰۰۰\times۰/۹=۹۰۰$	$۹۰۰\times۰/۹=۸۱۰$	...

$\Rightarrow$ دنباله‌ی هندسی: $۱۰۰۰\,,\,۹۰۰\,,\,۸۱۰\,,\,...$ ، $\left(a_۱=۱۰۰۰\,,\,q=\frac{۹}{۱۰}\,,\,n=۵۰\right)$

$$S_n=\frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}=\frac{۱۰۰۰\left(۱-\left(\frac{۹}{۱۰}\right)^{۵۰}\right)}{۱-\frac{۹}{۱۰}}>\frac{۱۰۰۰}{۱-\frac{۹}{۱۰}}=۱۰۰۰۰$$

بنابراین بیش‌ترین پول علی ۱۰۰۰۰ تومان خواهد بود. درنتیجه پول صندوق از ۱۰۰۰۰ تومان بیش‌تر نمی‌شود.

تذکر اگر n به سمت بی‌نهایت برود $(\frac{9}{10})^n \simeq 0$ می‌شود.

۵– برای محافظت از تابش‌های مضر مواد رادیواکتیو، لایه‌هایی محافظتی ساخته شده است که شدت تابش‌ها پس از عبور از آن‌ها نصف می‌شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش ۹۹ درصد کاهش بیابد؟

لایه‌ی محافظتی	۱	۲	...
شدت تابش	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{4}$	...

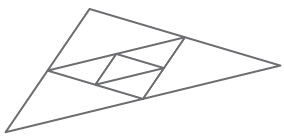
$\Rightarrow$ دنباله‌ی هندسی : $\frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \ldots$

$$a\frac{1-q^n}{1-q} > \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} > \frac{99}{100} \Rightarrow 1-(\frac{1}{2})^n > \frac{99}{100} \Rightarrow 1-\frac{99}{100} > (\frac{1}{2})^n \Rightarrow \frac{1}{100} > (\frac{1}{2})^n$$

$$\Rightarrow 100 < 2^n \Rightarrow n \geq 7$$

اگر تعداد لایه‌ها ۷ تا باشد، شدت تابش بیش از ۹۹ درصد کاهش می‌یابد.

۶– یک مثلث با محیط P و مساحت S در نظر بگیرید. وسط‌های اضلاع آن را به هم وصل کنید و مثلث کوچک‌تر جدیدی بسازید. این عمل را مجدداً روی مثلث کوچک‌تر انجام دهید. این عملیات را به‌طور متوالی ادامه دهید.



مجموع محیط مثلث‌های به‌دست آمده (با احتساب مثلث اولیه) چه‌قدر است؟ مجموع مساحت مثلث‌های به‌دست آمده چه‌قدر است؟

با وصل کردن اضلاع مثلث، مثلث جدیدی به‌دست می‌آید که اضلاع آن نصف اضلاع مثلث اولیه و نسبت تشابه آن $\frac{1}{2}$ می‌باشد. بنابراین در هر بار انجام این عمل، محیط نصف $(\frac{1}{2})$ و مساحت $\frac{1}{4}$ می‌شود. طبق فرض مسئله، محیط مثلث P و مساحت آن S است، بنابراین مجموع محیط و مساحت مثلث‌های به‌دست آمده به شکل زیر می‌باشد:

$$P+\frac{P}{2}+\frac{P}{4}+\cdots = P(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots) = P(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}) = 2P$$

$$S+\frac{S}{4}+\frac{S}{16}+\cdots = S(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots) = S(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}) = \frac{4S}{3}$$

تمرین در کلاس

صفحه‌ی ۶

۱– چند جمله‌ای $P(x) = 4x^4 + 2x^3 + 1$ را بر چند جمله‌ای $B(x) = x^2 - 1$ تقسیم کنید.

$$\begin{array}{l|l} \cancel{4x^4} + 2x^3 + 1 & x^2 - 1 \\ \hline -\cancel{4x^4} \pm 4x^2 & 4x^2 + 2x + 4 \\ \hline \cancel{2x^3} + 4x^2 + 1 & \\ -\cancel{2x^3} \pm 2x & \\ \hline \cancel{4x^2} + 2x + 1 & \\ -\cancel{4x^2} \pm 4 & \\ \hline 2x + 5 & \end{array}$$

۲– مقسوم، مقسوم‌علیه، خارج‌قسمت و باقی‌مانده را مشخص کنید.

مقسوم $: P(x) = ۴x^۴ + ۲x^۳ + ۱$ ، مقسوم‌علیه $: B(x) = x^۲ - ۱$

خارج‌قسمت $: Q(x) = ۴x^۲ + ۲x + ۴$ ، باقی‌مانده $: R(x) = ۲x + ۵$

۳– رابطه‌ی تقسیم را بنویسید و به کمک آن مقدار $P(۱)$ و $P(-۱)$ را به‌دست آورید.

$$P(x) = B(x)Q(x) + R(x) = (x^۲ - ۱)(۴x^۲ + ۲x + ۴) + ۲x + ۵$$

$$P(۱) = \overbrace{(۱^۲ - ۱)}^{۰}\overbrace{(۴(۱)^۲ + ۲(۱) + ۴)}^{۱۰} + ۲(۱) + ۵ = ۰ + ۲ + ۵ = ۷$$

$$P(-۱) = \overbrace{\left((-۱)^۲ - ۱\right)}^{۰}\left(۴(-۱)^۲ + ۲(-۱) + ۴\right) + ۲(-۱) + ۵ = ۰ - ۲ + ۵ = ۳$$

فعالیت ۲

صفحه‌ی ۷

فرض کنید چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x - a$ تقسیم شده است و باقی‌مانده‌ی آن R باشد.

۱– رابطه‌ی تقسیم را بنویسید.

$$P(x) = (x - a)Q(x) + R$$

۲– درجه‌ی باقی‌مانده‌ی تقسیم چیست؟

درجه‌ی باقی‌مانده‌ی تقسیم از درجه‌ی مقسوم‌علیه کم‌تر است. با توجه به این‌که درجه‌ی مقسوم‌علیه $(x - a)$ یک است، درجه‌ی باقی‌مانده صفر می‌باشد. (باقی‌مانده عدد است.)

۳– $P(a)$ را به‌دست آورید.

$$P(a) = (a - a)Q(a) + R = R$$

۴– اگر $P(a)$ صفر باشد، چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

باقی‌مانده صفر می‌باشد، در نتیجه مقسوم بر مقسوم‌علیه بخش‌پذیر است.

بحث در کلاس

صفحه‌ی ۷

چگونه می‌توانیم باقی‌مانده‌ی تقسیم یک چندجمله‌ای مانند $P(x)$ بر چندجمله‌ای $ax + b$ را به‌دست آوریم؟

ریشه‌ی عبارت $ax + b$ را به‌دست می‌آوریم و در چندجمله‌ای $P(x)$ قرار می‌دهیم. حاصل، باقی‌مانده‌ی تقسیم می‌باشد.

$$ax + b = ۰ \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a} \quad ، \quad P\left(-\frac{b}{a}\right) = R$$

تمرین در کلاس

صفحه‌ی ۷

الف) درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید:

۱– عبارت $۳x^۲ - ۵x + ۲$ بر $x - ۱$ بخش‌پذیر است. ✓

$$x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \quad ، \quad P(۱) = ۳(۱)^۲ - ۵(۱) + ۲ = ۰$$

باقی‌مانده صفر می‌باشد، بنابراین عبارت $۳x^۲ - ۵x + ۲$ بر $x - ۱$ بخش‌پذیر است.

۲– چندجمله‌ای $x^n - a^n$ بر $x-a$ بخش‌پذیر است. ✓

$x - a = 0 \Rightarrow x = a$ ، $P(a) = (a)^n - (a)^n = 0$

باقی‌مانده صفر است، پس چندجمله‌ای $x^n - a^n$ بر $x-a$ بخش‌پذیر است.

۳– چندجمله‌ای $x^n + a^n$ بر $x+a$ بخش‌پذیر است. ✗

$x + a = 0 \Rightarrow x = -a$ ، $P(-a) = (-a)^n + a^n \Rightarrow R = 0$; n فرد باشد ، $R = 2a^n$; n زوج باشد

۴– باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $ax+b$ برابر است با $P(-b)$. ✗

$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$ ، $P(-\frac{b}{a}) = R$

توجه داشته باشید که اگر $a = 1$ باشد، این گزاره درست است.

ب) باقی‌مانده‌ی تقسیم $4x^3 - 2x + 1$ بر $2x - 1$ را تعیین کنید.

$$2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow R = P(\frac{1}{2}) \Rightarrow R = 4(\frac{1}{2})^3 - 2(\frac{1}{2}) + 1 = \frac{1}{2} - 1 + 1 = \frac{1}{2}$$

فعالیت ۳

صفحه‌ی ۸

برای یک عدد حقیقی a و عدد طبیعی n عبارت $S = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n-1}$ را در نظر بگیرید.

۱– عبارت $aS - S$ را حساب کنید و اتحاد زیر را نتیجه بگیرید.
$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + \cdots + a^2 + a + 1)$

$$\begin{cases} S = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n-1} \\ aS = a + a^2 + a^3 + a^4 + \cdots + a^n \end{cases} \Rightarrow aS - S = \cancel{a} + \cancel{a^2} + \cancel{a^3} + \cancel{a^4} + \cdots + a^n - 1 - \cancel{a} - \cancel{a^2} - \cancel{a^3} - \cdots - \cancel{a^{n-1}}$$

$$\Rightarrow aS - S = a^n - 1 \Rightarrow S(a-1) = a^n - 1 \xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{S را جایگزین}} a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + \cdots + a^2 + a + 1)$$

۲– اگر n عددی فرد باشد، با تبدیل a به $-a$ نتیجه بگیرید:
$a^n + 1 = (a+1)(a^{n-1} - a^{n-2} + \cdots - a + 1)$

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + \cdots + a^2 + a + 1) \xrightarrow[\text{n فرد است.}]{a \to (-a)} (-a)^n - 1 = (-a-1)((-a)^{n-1} + \cdots + (-a)^2 - a + 1)$$

$$\Rightarrow -(a^n + 1) = -(a+1)(a^{n-1} - a^{n-2} + \cdots - a + 1) \Rightarrow a^n + 1 = (a+1)(a^{n-1} - a^{n-2} + \cdots - a + 1)$$

تمرین در کلاس

صفحه‌ی ۸

به کمک اتحاد $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + \cdots + a^2 + a + 1)$ اتحاد زیر را ثابت کنید.

$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$

اگر $y = 0$ باشد، درستی اتحاد ثابت شده است $(x^n = x^n)$. اگر $y \neq 0$ باشد، فرض می‌کنیم $a = \frac{x}{y}$ و در اتحاد قرار می‌دهیم،

بنابراین داریم:

$$(\frac{x}{y})^n - 1 = (\frac{x}{y} - 1)\left((\frac{x}{y})^{n-1} + \cdots + (\frac{x}{y})^2 + (\frac{x}{y}) + 1\right) = (x-y)(\frac{x^{n-1}}{y^n} + \cdots + \frac{x^2}{y^3} + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y})$$

$$\xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم.}]{\text{طرفین را در } y^n} x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

◆ فعالیت ۴

صفحه‌ی ۹

به اتحادهای زیر و ضرایبی که در آن‌ها است، توجه کنید.

$(a+b)^{۰}=۱$	۱
$(a+b)^{۱}=a+b$	۱ ۱
$(a+b)^{۲}=a^{۲}+۲ab+b^{۲}$	۱ ۲ ۱
$(a+b)^{۳}=a^{۳}+۳a^{۲}b+۳ab^{۲}+b^{۳}$	۱ ۳ ۳ ۱
$(a+b)^{۴}=a^{۴}+۴a^{۳}b+۶a^{۲}b^{۲}+۴ab^{۳}+b^{۴}$	۱ ۴ ۶ ۴ ۱
$(a+b)^{۵}=a^{۵}+۵a^{۴}b+۱۰a^{۳}b^{۲}+۱۰a^{۲}b^{۳}+۵ab^{۴}+b^{۵}$	۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱

۱– چه الگویی در توان‌های a و b و ضرایب آن‌ها می‌یابید؟

در جمله‌ی اول، a بزرگ‌ترین توان (توان پرانتز) را دارد و توان b، صفر است. در جملات بعدی، از توان a، یک واحد کم می‌شود و به توان b اضافه می‌شود و در آخرین جمله b بزرگ‌ترین توان را دارد و توان a صفر است. می‌توان در مورد ضریب جملات، الگوی زیر را بیان نمود:

تعداد جملات قبلی ÷ (توان a در جمله‌ی قبل × ضریب جمله‌ی قبلی)

به عنوان مثال در $(a+b)^{۵}$، ضریب جمله‌ی سوم به‌صورت مقابل محاسبه می‌شود.

ضریب جمله‌ی قبلی   توان a در جمله‌ی قبلی

$$\frac{۵\times۴}{۲}=۱۰$$

تعداد جملات قبلی

تذکر در هر جمله، مجموع توان‌های a و b باید برابر با توان پرانتز باشد.

۲– با توجه به الگوی به‌دست آمده $(a+b)^{۶}$ برابر چه عبارتی می‌شود؟

$$(a+b)^{۶}=a^{۶}+\frac{۶}{۱}a^{۵}b+\frac{۶\times۵}{۲}a^{۴}b^{۲}+\frac{۱۵\times۴}{۳}a^{۳}b^{۳}+\frac{۲۰\times۳}{۴}a^{۲}b^{۴}+\frac{۱۵\times۲}{۵}ab^{۵}+\frac{۶\times۱}{۶}b^{۶}$$

$$=a^{۶}+۶a^{۵}b+۱۵a^{۴}b^{۲}+۲۰a^{۳}b^{۳}+۱۵a^{۲}b^{۴}+۶ab^{۵}+b^{۶}$$

۳– تعداد جملات هر بسط با توان دو جمله‌ای چه رابطه‌ای دارد؟

تعداد جملات هر بسط، یک واحد از توان دو جمله‌ای بیش‌تر است.

◆ تمرین در کلاس

صفحه‌ی ۱۰

۱– اعداد هر سطر در مثلث خیام – پاسکال چگونه از طریق اعداد سطر قبل از آن به‌دست می‌آیند؟

در هر سطر دو عدد ابتدا و انتها، یک است. اعداد دیگر از جمع دو عدد متوالی در هر سطر به‌دست آمده و در سطر بعدی در بین آن دو عدد نوشته می‌شود.

۱
۱ ۱
۱ ۲ ۱
۱ ۳ ۳ ۱

۲– چه ارتباطی بین اعداد هر سطر در مثلث صفحه‌ی قبل با بسط دو جمله‌ای غیاث‌الدین جمشید کاشانی وجود دارد؟

اعداد هر سطر نشان‌دهنده‌ی ضرایب بسط دوجمله‌ای $(a+b)^n$ می‌باشد که به‌ترتیب توان‌های نزولی از a (یا b) مرتب شده‌اند.

۳– مجموع ضرایب در هر یک از بسط‌های $(a+b)^۲$، $(a+b)^۳$ و $(a+b)^۴$ را به‌دست آورید. آیا می‌توانید مجموع ضرایب در بسط $(a+b)^n$ را حدس بزنید؟ حدس خود را ثابت کنید.

$(a+b)^۲$ مجموع ضرایب بسط: $۲^۲ = ۴$

$(a+b)^۳$ مجموع ضرایب بسط: $۲^۳ = ۸$ ، $(a+b)^۴$ مجموع ضرایب بسط: $۲^۴ = ۱۶$

حدس می‌زنیم مجموع ضرایب در بسط $(a+b)^n$، مساوی ۲^n باشد. برای این منظور، $a=۱$ و $b=۱$ را قرار می‌دهیم، داریم: $(۱+۱)^n = ۲^n$

۴– طرف دوم هر یک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

$$(\mathbf{۲x+y})^{۵} = (۲x)^۵ + ۵(۲x)^۴y + \frac{۴\times۵}{۲}(۲x)^۳y^۲ + \frac{۱۰\times۳}{۳}(۲x)^۲y^۳ + \frac{۱۰\times۲}{۴}(۲x)y^۴ + \frac{۵}{۵}y^۵$$

$$= ۳۲x^۵ + ۸۰x^۴y + ۸۰x^۳y^۲ + ۴۰x^۲y^۳ + ۱۰xy^۴ + y^۵$$

$$(\mathbf{۳x+۲z})^{۴} = (۳x)^۴ + ۴(۳x)^۳(۲z) + \frac{۴\times۳}{۲}(۳x)^۲(۲z)^۲ + \frac{۶\times۲}{۳}(۳x)(۲z)^۳ + \frac{۴}{۴}(۲z)^۴$$

$$= ۸۱x^۴ + ۲۱۶x^۳z + ۲۱۶x^۲z^۲ + ۹۶xz^۳ + ۱۶z^۴$$

$$(\mathbf{۲a-۱})^{۶} = (۲a)^۶ - ۶(۲a)^۵ + \frac{۶\times۵}{۲}(۲a)^۴ - \frac{۱۵\times۴}{۳}(۲a)^۳ + \frac{۲۰\times۳}{۴}(۲a)^۲ - \frac{۱۵\times۲}{۵}(۲a) + \frac{۶}{۶}$$

$$= ۶۴a^۶ - ۱۹۲a^۵ + ۲۴۰a^۴ - ۱۶۰a^۳ + ۶۰a^۲ - ۱۲a + ۱$$

◆ مسائل

صفحه‌ی ۱۰ و ۱۱

۱– $P(x)$ یک چندجمله‌ای درجه ۲ است و ضریب بزرگ‌ترین توان آن ۱ است. در هر یک از حالت‌های زیر $P(x)$ را به‌گونه‌ای تعیین کنید که در شرایط مورد نظر صدق کند.

طبق فرض $P(x) = x^۲ + ax + b$ می‌باشد. در هر یک از حالت‌های زیر a و b را محاسبه نموده و $P(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

الف) $P(۱)=۰ , P(۲)=۰$

$$\begin{cases} P(۱)=۰ \Rightarrow P(۱)=(۱)^۲ + a(۱) + b = ۱+a+b=۰ \\ P(۲)=۰ \Rightarrow P(۲)=(۲)^۲ + (a\times۲)+b = ۴+۲a+b=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} -۱\times \\ \ \end{matrix}\begin{cases} a+b=-۱ \\ ۲a+b=-۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a-\cancel{b}=۱ \\ ۲a+\cancel{b}=-۴ \end{cases}$$
$$a=-۳$$

$$a+b=-۱ \xrightarrow{a=-۳} -۳+b=-۱ \Rightarrow b=۲ \Rightarrow P(x)=x^۲-۳x+۲$$

ب) $P(۰)=۰ , P(۱)=۱$: $P(۰)=۰+(a\times۰)+b=b \xrightarrow{P(۰)=۰} b=۰$

$$P(۱)=(۱)^۲+(a\times۱)+b=۱+a+b \xrightarrow[b=۰]{P(۱)=۱} ۱+a=۱ \Rightarrow a=۰ \Rightarrow P(x)=x^۲$$

ج) $P(-۱)=۲ , P(۲)=-۱$: $P(۲)=(۲)^۲+۲a+b=۴+۲a+b \xrightarrow{P(۲)=-۱} ۲a+b+۴=-۱ \Rightarrow ۲a+b=-۵$

$$P(-۱)=(-۱)^۲+a(-۱)+b=۱-a+b \xrightarrow{P(-۱)=۲} -a+b+۱=۲ \Rightarrow -a+b=۱$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \ \\ -۱\times \end{matrix}\begin{cases} ۲a+b=-۵ \\ -a+b=۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲a+\cancel{b}=-۵ \\ a-\cancel{b}=-۱ \end{cases} \Rightarrow a-b=-۱ \xrightarrow{a=-۲} -۲-b=-۱ \Rightarrow b=-۱ \Rightarrow P(x)=x^۲-۲x-۱$$
$$۳a=-۶ \Rightarrow a=-۲$$

۲– مقدار m را چنان بیابید که چندجمله‌ای $P(x)=x^{۳}-mx^{۲}-x+۴$ بر $۲x+۱$ بخش‌پذیر باشد.

$$۲x+۱=۰\Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow P(-\frac{۱}{۲})=(-\frac{۱}{۲})^{۳}-m(-\frac{۱}{۲})^{۲}-(-\frac{۱}{۲})+۴=-\frac{۱}{۸}-\frac{m}{۴}+\frac{۱}{۲}+۴=۰$$

$$\Rightarrow -\frac{m}{۴}=\frac{۱}{۸}-\frac{۱}{۲}-۴=-\frac{۳۵}{۸}\Rightarrow m=\frac{۳۵}{۲}$$

تذکر چون چندجمله‌ای بر $۲x+۱$ بخش‌پذیر است، باقی‌مانده باید صفر باشد.

۳– در چندجمله‌ای $P(x)=x^{۳}+ax^{۲}+x+b$ ، a و b را طوری بیابید که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر $x-۱$ برابر ۴ بوده و بر $x+۲$ بخش‌پذیر باشد.

$$x-۱=۰\Rightarrow x=۱\Rightarrow P(۱)=(۱)^{۳}+a(۱)^{۲}+۱+b\xrightarrow{P(۱)=۴}a+b+۲=۴\Rightarrow a+b=۲$$

$$x+۲=۰\Rightarrow x=-۲\Rightarrow P(-۲)=(-۲)^{۳}+a(-۲)^{۲}+(-۲)+b\xrightarrow{P(-۲)=۰}۴a+b-۱۰=۰\Rightarrow ۴a+b=۱۰$$

$$\Rightarrow {}^{-۱\times}\begin{cases}a+b=۲\\ ۴a+b=۱۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a-\cancel{b}=-۲\\ ۴a+\cancel{b}=۱۰\end{cases}\qquad\Rightarrow\quad a+b=۲\xrightarrow{a=\frac{۸}{۳}}b=۲-\frac{۸}{۳}=-\frac{۲}{۳}\Rightarrow P(x)=x^{۳}+\frac{۸}{۳}x^{۲}+x-\frac{۲}{۳}$$

$$۳a=۸\Rightarrow a=\frac{۸}{۳}$$

۴– m و n را چنان بیابید که چندجمله‌ای $x^{۴}-۳x^{۳}+mx+n$ بر $x^{۲}-۵x+۶$ بخش‌پذیر باشد.

$$x^{۲}-۵x+۶=۰\Rightarrow(x-۳)(x-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}x-۳=۰\Rightarrow x=۳\\ x-۲=۰\Rightarrow x=۲\end{cases}$$

$$P(۳)=(۳)^{۴}-۳(۳)^{۳}+m\times۳+n\xrightarrow{P(۳)=۰}۸۱-۸۱+۳m+n=۰\Rightarrow ۳m+n=۰$$

$$P(۲)=(۲)^{۴}-۳(۲)^{۳}+۲m+n\xrightarrow{P(۲)=۰}۱۶-۲۴+۲m+n=۰\Rightarrow ۲m+n=۸$$

$$\Rightarrow {}^{-۱\times}\begin{cases}۳m+n=۰\\ ۲m+n=۸\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-۳m-\cancel{n}=۰\\ ۲m+\cancel{n}=۸\end{cases}$$

$$-m=۸\Rightarrow m=-۸\ ,\ ۳m+n=۰\Rightarrow ۳\times(-۸)+n=۰\Rightarrow n=۲۴$$

۵– نشان دهید عبارت $x-۲$ یک فاکتور (عامل) $f(x)=x^{۳}+۲x^{۲}-۵x-۶$ است. سپس معادله‌ی $f(x)=۰$ را حل کنید.

$$x-۲=۰\Rightarrow x=۲\Rightarrow f(۲)=(۲)^{۳}+۲(۲)^{۲}-(۵\times۲)-۶=۸+۸-۱۰-۶=۰$$

$f(x)$ بر $(x-۲)$ بخش‌پذیر است، پس $x-۲$ یک فاکتور (عامل) از $f(x)$ می‌باشد. با تقسیم $f(x)$ بر $(x-۲)$، عامل دیگر را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{l|l}\cancel{x^{۳}}+۲x^{۲}-۵x-۶ & x-۲\\ \hline \mp\cancel{x^{۳}}\pm۲x^{۲} & x^{۲}+۴x+۳\\ \hline \cancel{۴x^{۲}}-۵x-۶ & \\ \mp\cancel{۴x^{۲}}\pm۸x & \\ \hline ۳x-۶ & \\ \mp۳x\pm۶ & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

$$f(x)=(x-۲)(x^{۲}+۴x+۳)\xrightarrow{f(x)=۰}(x-۲)(x^{۲}+۴x+۳)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-۲=۰\Rightarrow x=۲\\ x^{۲}+۴x+۳=۰\Rightarrow(x+۳)(x+۱)=۰\Rightarrow x=-۳\ ,\ x=-۱\end{cases}$$

مجموعه جواب‌های معادله $=\{-۳,-۱,۲\}$

۶- a را چنان بیابید که یک جواب معادله‌ی $x^۳ - ۲x^۲ + ax + ۲ = ۰$ برابر ۲ باشد. سپس جواب‌های دیگر معادله را به‌دست آورید.

$$x = ۲ \Rightarrow (۲)^۳ - ۲(۲)^۲ + a(۲) + ۲ = ۰ \Rightarrow ۸ - ۸ + ۲a + ۲ = ۰ \Rightarrow ۲a = -۲ \Rightarrow a = -۱ \Rightarrow x^۳ - ۲x^۲ - x + ۲ = ۰$$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^۳} - \cancel{۲x^۲} - x + ۲ & x - ۲ \\ \hline \mp \cancel{x^۳} \pm \cancel{۲x^۲} & x^۲ - ۱ \\ \hline -x + ۲ & \\ \pm x \mp ۲ & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

$$\Rightarrow x^۳ - ۲x^۲ - x + ۲ = (x - ۲)(x^۲ - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \\ x^۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱ \end{cases}$$

مجموعه‌ی جواب‌های معادله $= \{-۱, ۱, ۲\}$

تذکر ۱) $x = ۲$ یکی از ریشه‌های معادله است و با قراردادن آن در معادله، مقدار عبارت سمت چپ معادله مساوی صفر می‌شود.

۲) $x - ۲$ یک فاکتور (عامل) از معادله می‌باشد، با تقسیم معادله بر $x - ۲$، عامل دیگر به‌دست می‌آید.

۷- حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $(۱ - x)^۷ = ۱^۷ - ۷(۱)^۶ x + \frac{۷ \times ۶}{۲}(۱)^۵ x^۲ - \frac{۲۱ \times ۵}{۳}(۱)^۴ x^۳ + \frac{۳۵ \times ۴}{۴}(۱)^۳ x^۴ - \frac{۳۵ \times ۳}{۵}(۱)^۲ x^۵ + \frac{۲۱ \times ۲}{۶}(۱) x^۶ - \frac{۷}{۷} x^۷$

$= ۱ - ۷x + ۲۱x^۲ - ۳۵x^۳ + ۳۵x^۴ - ۲۱x^۵ + ۷x^۶ - x^۷$

ب) $(۱ + \frac{۲}{x})^۶ = ۱^۶ + ۶(۱)^۵ (\frac{۲}{x}) + \frac{۶ \times ۵}{۲}(۱)^۴ (\frac{۲}{x})^۲ + \frac{۱۵ \times ۴}{۳}(۱)^۳ (\frac{۲}{x})^۳ + \frac{۲۰ \times ۳}{۴}(۱)^۲ (\frac{۲}{x})^۴ + \frac{۱۵ \times ۲}{۵}(۱)(\frac{۲}{x})^۵ + \frac{۶}{۶}(\frac{۲}{x})^۶$

$= ۱ + ۶(\frac{۲}{x}) + ۱۵(\frac{۲}{x})^۲ + ۲۰(\frac{۲}{x})^۳ + ۱۵(\frac{۲}{x})^۴ + ۶(\frac{۲}{x})^۵ + (\frac{۲}{x})^۶$

ج) $(۲x - ۳y)^۴ = (۲x)^۴ - ۴(۲x)^۳(۳y) + \frac{۴ \times ۳}{۲}(۲x)^۲(۳y)^۲ - \frac{۶ \times ۲}{۳}(۲x)(۳y)^۳ + \frac{۴}{۴}(۳y)^۴$

$= ۱۶x^۴ - ۹۶x^۳y + ۲۱۶x^۲y^۲ - ۲۱۶xy^۳ + ۸۱y^۴$

۸- عبارات زیر را تجزیه کنید.

$A = x^۹ - x^۳y^۳ = x^۳(x^۶ - y^۳) = x^۳\left((x^۲)^۳ - y^۳\right) = x^۳(x^۲ - y)(x^۴ + x^۲y + y^۲)$

$B = (a^۶ + ۱)^۲ - (a^۶ - ۱)^۲ = [(a^۶ + ۱) - (a^۶ - ۱)][(a^۶ + ۱) + (a^۶ - ۱)] = [a^۶ + ۱ - a^۶ + ۱][a^۶ + ۱ + a^۶ - ۱]$

$= ۲(۲a^۶) = ۴a^۶$

تذکر برای تجزیه‌ی عبارات بالا از اتحادهای زیر استفاده می‌کنیم:

$(a^n - b^n) = (a - b)(a^{n-۱} + a^{n-۲}b + \cdots + b^{n-۱})$

$(a^۲ - b^۲) = (a - b)(a + b)$

۹- اگر n یک عدد طبیعی زوج باشد، اتحاد مقابل را به‌دست آورید. $۱ - x^n = (۱ + x)(۱ - x + \cdots - x^{n-۱})$

برای هر عدد a داریم: $۱ - a^n = (۱ - a)(۱ + a + a^۲ + a^۳ + \cdots + a^{n-۱})$

عبارت بالا را به‌ازای $a = -x$ بازنویسی می‌کنیم: $۱ - (-x)^n = \left(۱ - (-x)\right)\left(۱ + (-x) + (-x)^۲ + (-x)^۳ + \cdots + (-x)^{n-۱}\right)$

$\xRightarrow{\text{n زوج است}} ۱ - x^n = (۱ + x)(۱ - x + x^۲ - x^۳ + \cdots - x^{n-۱})$